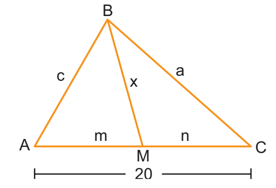


Solucionario Geometría 5.°

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 6) Unidad 1

1. Piden: menor valor entero de BM = x



Dato: a + c = 30

Por propiedad de existencia en el ΔABM:
$c - m < x < c + m$ ...(1)

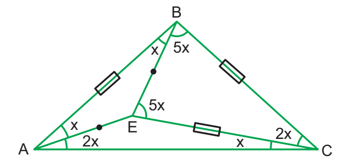
Por propiedad de existencia en el ΔMBC:
$a - n < x < a + n$ ...(2)

Sumando (1) y (2), se tiene:
$(a + c) - (m + n) < 2x < (a + c) + (m + n)$
$30 - 20 < 2x < 30 + 20$
$\Rightarrow 10 < 2x < 50$
$5 < x < 25$

∴ El menor valor entero de x es 6 cm.

Clave A

2. Piden: x



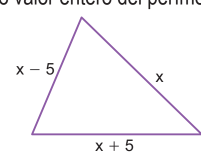
Completando ángulos, se tiene que el ΔBCE es isósceles.

También se observa que el ΔABC es isósceles.
$\Rightarrow m\angle BCE = 2x$

Finalmente en el ΔABC:
$3x + 6x + 3x = 180°$
$12x = 180°$
$x = 15°$

Clave D

3. Piden: mínimo valor entero del perímetro.



Por propiedad de existencia:
$5 < x - 5 < 2x + 5$
$10 < x$
$10 < x < 2x$
$5 < x + 5 < 2x - 5$
$10 < x$

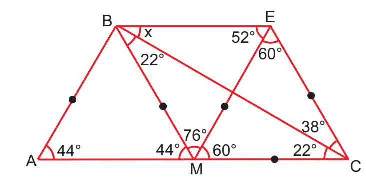
Perímetro (2p = 3x), será mínimo cuando x tome su mínimo valor entero, entonces:

$x_{min} = 11$ cm

∴ El mínimo valor entero del perímetro es:
3(11) = 33 cm

Clave E

4. Piden: x



Se traza la ceviana BM, tal que m∠MBC = 22°.

Entonces, los triángulos ABM y BMC son isósceles.

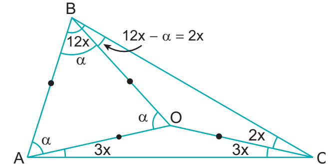
Luego se traza $\overline{ME}$, formándose el ΔMEC equilátero.

Finalmente el ΔBME resulta son isósceles.
$\Rightarrow x + 22° = 52°$
∴ x = 30°

Clave B

5. Piden: x



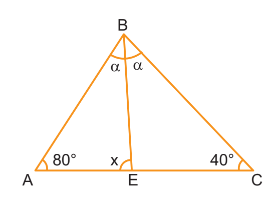


Por propiedad planteamos:
$3x + 5x + 12x - \alpha = \alpha$
$20x = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 10x$

Se tiene que el ΔBOC es isósceles, por lo que el ΔABO resulta equilátero. Entonces:
$\alpha = 60°$
$10x = 60°$
∴ x = 6°

Clave B

6.

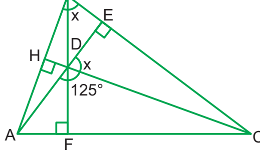


ΔABC: $80° + 40° + 2x = 180°$
$2x = 60°$
$x = 30°$

ΔBEC: $x = 40° + \alpha$
$x = 40° + 30$
$x = 70°$

Clave C

7.

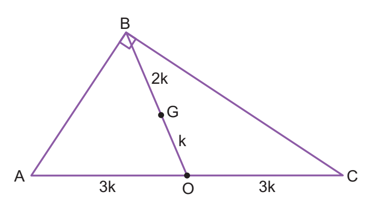


Para el △ABC, D es su ortocentro.

En el cuadrilátero BHDE inscriptible, entonces:
$x + 125° = 180°$
∴ x = 55°

Clave D

8.

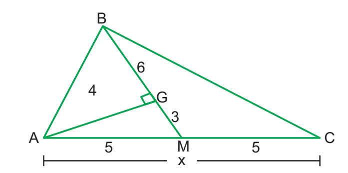


B: ortocentro del ⊿ABC
O: circuncentro del ⊿ABC
G: baricentro del ⊿ABC

Piden: $\dfrac{BG}{AC} = \dfrac{2k}{6k} = \dfrac{1}{3}$

Clave B

9.



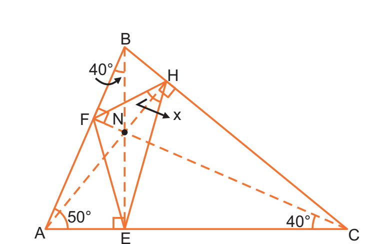
Prolongamos $\overline{BG}$:

Por propiedad del baricentro:
$BG = 2GM \Rightarrow GM = 3$

Del teorema de Pitagoras:
$AM^2 = AG^2 + GM^2$
$AM^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AM = 5$
∴ x = 10

Clave E

10.



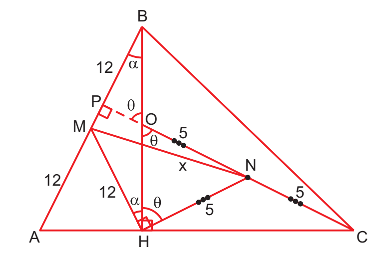
Entonces N es el ortocentro del △ABC.

El cuadrilátero FBHN inscriptible, entonces:
m∠FBN = m∠FHN = 40°

El cuadrilátero HCEN inscriptible, entonces:
m∠NCE = m∠NHE = 40°
$\Rightarrow x = m\angle FHN + m\angle NHE$
$x = 40° + 40°$
∴ x = 80°

Clave B

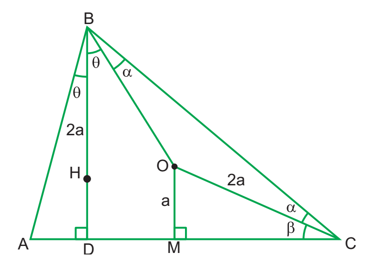
11.



Dato: O es ortocentro del $\triangle ABC$:
Del gráfico: $\alpha + \theta = 90°$
En el ◺MHN; por Pitágoras:
$x^2 = 12^2 + 5^2$
$x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$

Clave C

12.

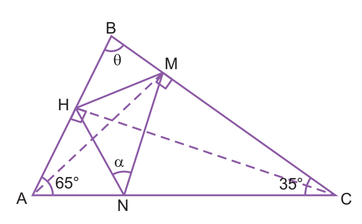


Trazamos: $\overline{OC}$
Por ser O circuncentro: $\Rightarrow OB = OC$
Por propiedad: $OM = \dfrac{BH}{2} \wedge \theta = \alpha$

Entonces el ◺OMC resulta notable de 30° y 60°.
$\Rightarrow \beta = 30°$
En el ◺BDC:
$\theta + \alpha + \alpha + \beta = 90°$
$\theta + \theta + \theta + 30° = 90°$
$3\theta = 60°$
$\therefore \theta = 20°$

Clave B

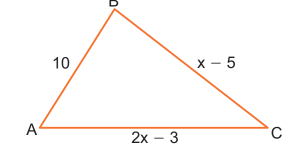
13.



En el ΔABC:
$65° + \theta + 35° = 180° \Rightarrow \theta = 80°$
Como el triángulo MNH es el triángulo órtico del triángulo ABC, se cumple:
$\alpha = 180° - 2\theta$
$\alpha = 180° - 2(80°)$
$\therefore \alpha = 20°$

Clave D

14.



Por propiedad de existencia:

- $10 < 3x - 8 \Rightarrow 6 < x$
- $2x - 3 < x + 5 \Rightarrow x < 8$

Es decir: $6 < x < 8$ ...(1)
Pero $2p = 10 + (2x - 3) + (x - 5) = 3x + 2$
De (1): $18 < 3x < 24$
$20 < 3x + 2 < 26$
$\therefore 20 < 2p < 26$

Clave A

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

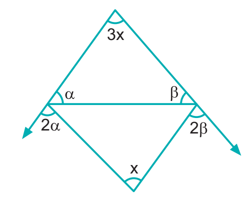
2.

3.

4.

Razonamiento y demostración

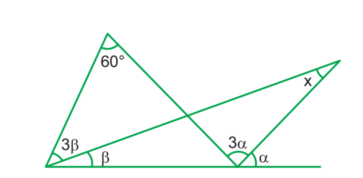
5.



Por propiedad:
$4x = 2(\alpha + \beta)$
$\Rightarrow 2x = \alpha + \beta$ ...(1)
$\alpha + \beta + 3x = 180°$ ...(2)
Reemplazamos (1) en (2):
$2x + 3x = 180°$
$x = 36°$

Clave B

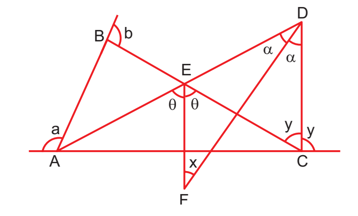
6.



$\beta + x = \alpha \Rightarrow x = \alpha - \beta$
$4\alpha = 4\beta + 60°$
$4(\alpha - \beta) = 60°$
$\alpha - \beta = 15° = x$

Clave A

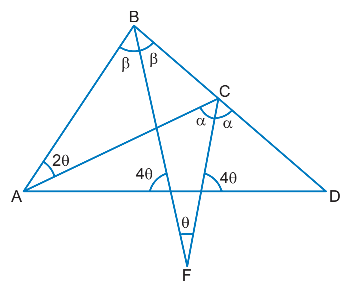
7.



Por dato: $a + b = 260°$
Aplicando propiedad de bisectrices en el ΔEDC:
$x = \dfrac{y}{2}$
En ΔABC:
$a + b + 2y = 360°$
$260° + 2(2x) = 360°$
$\Rightarrow x = 25°$

Clave D

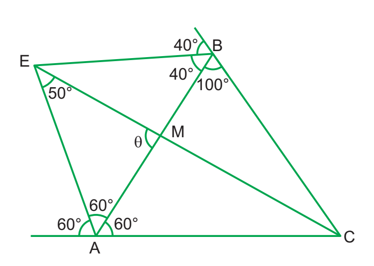
8.



Aplicando propiedad de bisectrices en el ΔABC:
$m\angle BFC = \theta$
Luego:
$4\theta + 4\theta + \theta = 180°$
$\theta = 20°$

Clave E

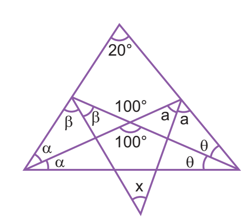
9.



Nos piden: θ
Como E es excentro: $m\angle ABC = 2(m\angle AEC)$
En el $\triangle AME$:
$\theta + 60° + 50° = 180°$
$\theta = 70°$

Clave C

10.



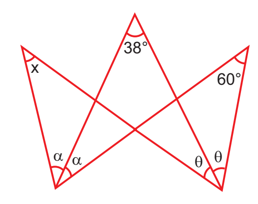
$2\alpha + 2\theta = 180° - 20°$
$2\alpha + 2\theta = 160°$
$\alpha + \theta = 80°$

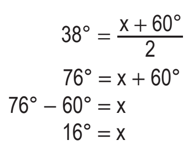
$\left.\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta + \theta = 180° \\ 2\theta + 2a + \alpha = 180° \end{array}\right\}$ Sumamos y reemplazamos $\alpha + \theta = 80°$

$\Rightarrow \beta + a = 60°$
Luego:
$\beta + a + x = 100°$
$60° + x = 100°$
$x = 40°$

Clave B

11.

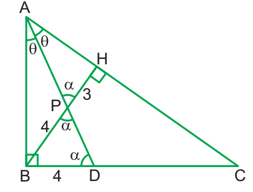




$$38° = \frac{x + 60°}{2}$$
$$76° = x + 60°$$
$$76° - 60° = x$$
$$16° = x$$

Clave A

12.



En el ◺AHP: $\theta + \alpha = 90°$

Luego en el ◺ABD:

$\theta + m\angle D = 90° \Rightarrow m\angle D = \alpha$

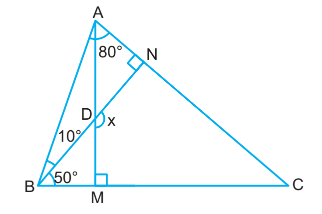
Entonces el △BPD resulta isósceles.

$\Rightarrow BP = BD = 4$

$\therefore BH = 4 + 3 = 7$

Clave E

13.



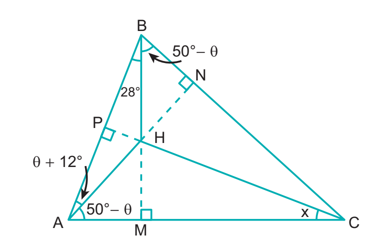
Por dato: $m\angle A = 80° \wedge m\angle B = 60°$

En el ◺DMB: $50° + 90° = x$

$\therefore x = 140°$

Clave C

14.



Prolongamos $\overline{BH}$, luego en el triángulo ABM por la suma de ángulos interiores:

$m\angle BMA = 90°$

Análogamente se deduce que:

$m\angle ANB = 90°$

Entonces, H es el ortocentro del △ABC.

En el ◺CPA:

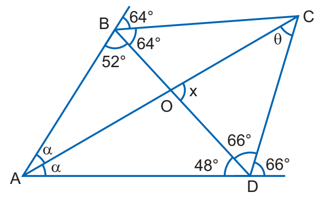
$x + \theta + 12° + 50° - \theta = 90°$

$x + 62° = 90°$

$\therefore x = 28°$

Clave B

15.



Del gráfico, C resulta un excentro del △ABD relativo a $\overline{BD}$.

Entonces, $\overline{AO}$ es bisectriz interior.

Por propiedad: $\theta = \dfrac{52°}{2} = 26°$

En el △OCD:

$x + \theta + 66° = 180°$

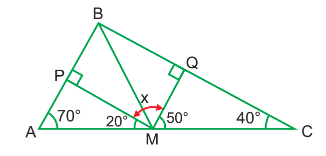
$x + 26° + 66° = 180°$

$\therefore x = 88°$

Clave D

Resolución de problemas

16.



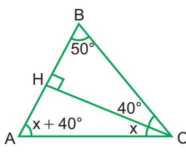
Del gráfico:

$x + 70° = 180°$

$\therefore \quad x = 110°$

Clave B

17.



Dato: AB = BC

Por suma de ángulos interiores:

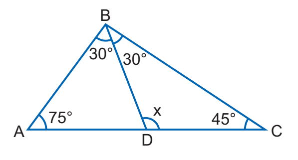
$2x + 80° + 50° = 180°$

$2x = 50°$

$\therefore \ x = 25°$

Clave B

18.



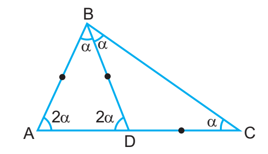
Suma de ángulos interiores:

$x + 75° = 180°$

$\therefore \ x = 105°$

Clave B

19. En un triángulo ABC:



Por suma de ángulos interiores:

$5\alpha = 180°$

$\alpha = 36°$

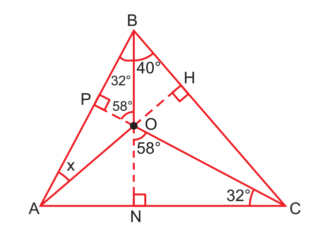
Dato: BC = AC

Luego: $m\angle BAC = 2\alpha$

$\therefore m\angle BAC = 72°$

Clave C

20.



Por dato: O es el ortocentro del △ABC

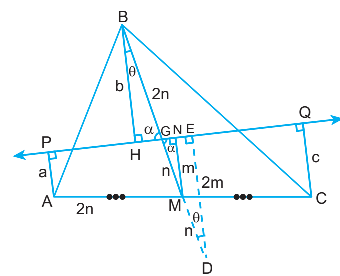
En el ◺AHB:

$x + 32° + 40° = 90°$

$\therefore x = 18°$

Clave C

21.



Por dato: a + c = 7

En el trapecio APQC:

$m = \dfrac{a + c}{2} \Rightarrow 2m = a + c$

Prolongamos $\overline{BM}$ tal que: GM = MD

Luego $\overline{MN}$ es la base media de $\overline{ED}$:

$ED = 2(MN) \Rightarrow ED = 2m$

Del gráfico: ◺BHG ≅ ◺DEG (caso ALA)

$\Rightarrow BH = ED$

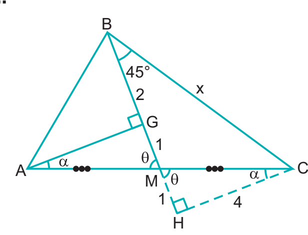
$b = 2m = a + c$

$b = a + c = 7$

$\therefore b = 7$

Clave A

22.



Por dato: G es baricentro del △ABC

$\Rightarrow BG = 2(GM) = 2(1) \Rightarrow BG = 2$

Prolongamos $\overline{BM}$ y trazamos la altura CH.

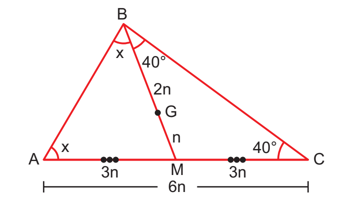
Luego: ◺AGM ≅ ◺CHM (caso ALA)

En el ◺ BHC notable de 45°: BH = HC

$\therefore x = 4\sqrt{2}$

Clave D

23.



Por dato: G es el baricentro del $\triangle ABC$

Además: $AC = 3BG \Rightarrow AC = 6n$

Luego, los triángulos BMA y BMC resultan ser isósceles.

En el $\triangle ABC$:

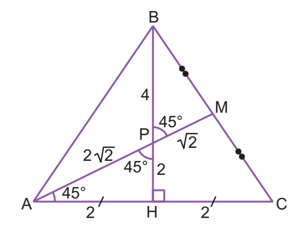
$x + x + 40° + 40° = 180°$

$2x = 100°$

$\therefore x = 50°$

Clave A

24.



Por dato: el $\triangle ABC$ es isósceles ($AB = BC$)

Entonces, P es el baricentro del $\triangle ABC$:

$AP = 2(PM)$

$AP = 2\sqrt{2}$

El ⊿AHP es notable de 45°: $AH = PH = 2$

Como P es baricentro: $BP = 2(PH) = 2(2)$

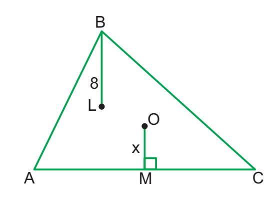
$\Rightarrow BP = 4$

Piden: $BH = BP + PH = 4 + 2$

$\therefore BH = 6$

Clave B

25.



Por dato, L es el ortocentro y O es el circuncentro del $\triangle ABC$.

Por propiedad: $BL = 2(OM)$

$8 = 2(x)$

$\therefore x = 4$

Clave C

Nivel 2 (página 10) Unidad 1

Comunicación matemática

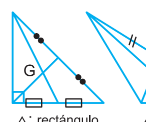
26.

27.

28.

- El baricentro de un triángulo siempre está ubicado en su interior. (V)

  Sea G: baricentro

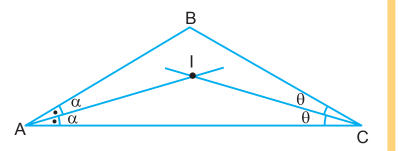


- Todo triángulo tiene tres excentros. (V)

  Por cada uno de los lados de un triángulo se encuentra un excentro relativo a cada uno de dichos lados.

- El incentro de un triángulo obtusángulo está ubicado en el exterior del triángulo. (F)

  Sea: $m\angle B > 90°$

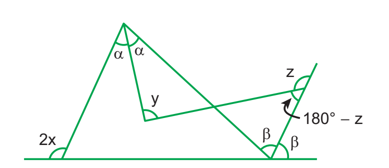


El incentro (I) se encuentra en el interior del triángulo.

Clave D

Razonamiento y demostración

29.



Por propiedad:

$\alpha + y = \beta + (180° - z)$

$y + z = 180° + \beta - \alpha$ ... (1)

$2\alpha + 180° = 2x + 2\beta$

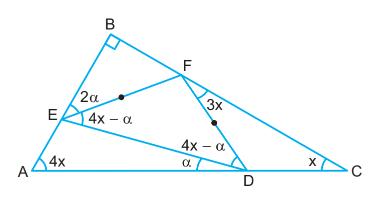
$x = \alpha + 90° - \beta$ ... (2)

Sumando (1) y (2):

$x + y + z = 270°$

Clave E

30.



$m\angle BED = 4x + a$

$\Rightarrow m\angle BAD = 4x$

En el ⊿ABC:

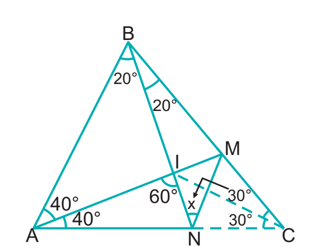
$4x + x = 90°$

$5x = 90°$

$x = 18°$

Clave E

31.



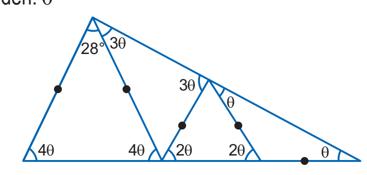
I: incentro del $\triangle ABC$

El cuadrilátero NIMC es inscriptible

$\therefore x = 30°$

Clave C

32. Piden: θ



Del gráfico:

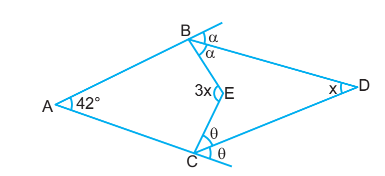
$28° + 4\theta + 4\theta = 180°$

$8\theta = 152°$

$\therefore \theta = 19°$

Clave C

33.



Por propiedad en ABEC:

$42° + 3x = 2\alpha + 2\theta$

$42° + 3x = 2(\alpha + \theta)$ ...(1)

Por propiedad en BDCE:

$x + \alpha + \theta = 3x$

$\alpha + \theta = 2x$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$42° + 3x = 2(2x)$

$42° + 3x = 4x$

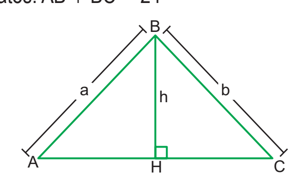
$\therefore x = 42°$

Clave B

Resolución de problemas

34. Piden: máximo valor entero de h

Datos: $AB + BC = 24$



Cada medida de los catetos en un triángulo es menor que la medida de la hipotenusa.

$\Rightarrow h < a$ (+) $2h < 24$

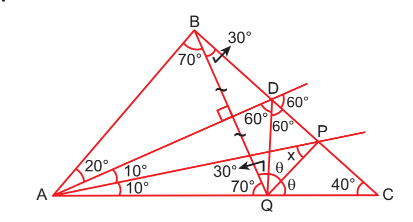
$h < b$ $h < 12$

$2h < a + b$

$\therefore$ El máximo valor entero de h es: 11

Clave C

35.



Del gráfico se observa:

P es excentro ⇒ m∠DQP = m∠CMP

$2\theta + 70° + 30° = 180° \Rightarrow 2\theta = 80°$

$\theta = 40°$

En el △APQ:

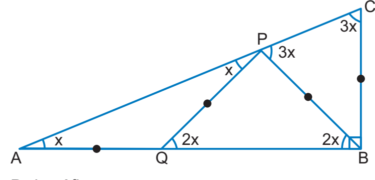
$10° + x = \theta = 40°$

$\therefore\ x = 30°$

Clave C

36. Piden: x

Datos: AQ = PQ = PB = BC



Del gráfico:

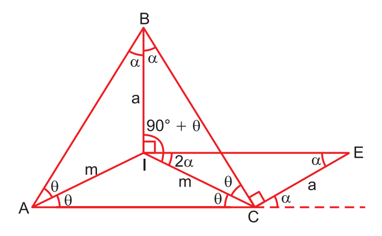
$x + 3x = 90°$

$4x = 90°$

$\therefore x = 22°30'$

Clave A

37.



Nos piden: α

Como I es incentro, m∠BIC = 90° + θ

Del gráfico se observa que:

△BIC ≅ △ECI (caso LAL)

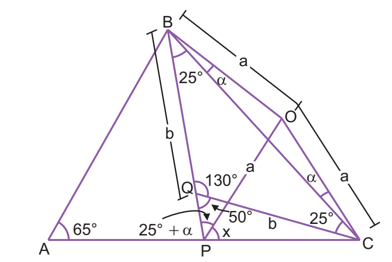
Luego θ = 2α

Como: $2\theta + \alpha + 90° = 180°$

$\Rightarrow \alpha = 18°$

Clave A

38.



Nos piden: x

$\overline{BP}$ contiene al circuncentro del △ABC.

Q: circuncentro del △ABC

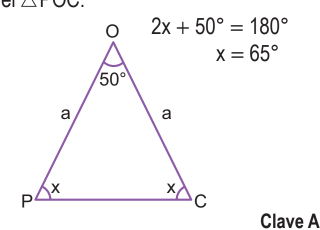
O: circuncentro del △PBC

De la figura m∠POC = 2m∠PBC = 50°

Luego en el △POC:

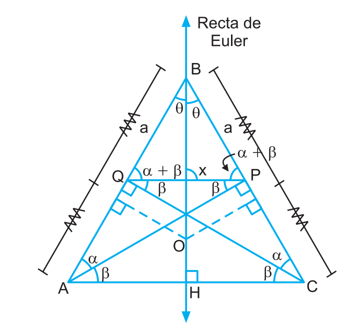
$2x + 50° = 180°$

$x = 65°$



Clave A

39.



Nos piden: x

Como el ΔQBP es isósceles.

⇒ m ∠ BQP = m∠BPQ = α + β

El ⏢AQPC es inscriptible

⇒ m∠BAC = m∠BCA = α + β

Luego el △ABC es isósceles: AB = BC

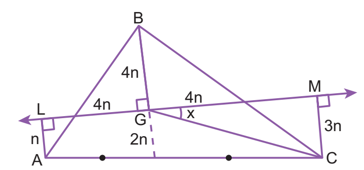
⇒ $\overline{BH}$ es bisectriz.

En el △QBP: $\alpha + \beta + \theta = 90°$

$\therefore x = 90°$

Clave C

40.



Nos piden: x

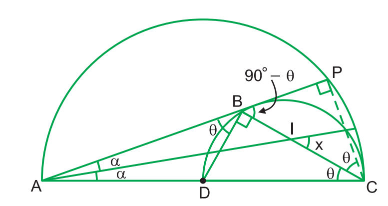
En el trapecio ALMC: MC = 3n

Luego el ◺GMC es notable 37° y 53°

$\therefore x = 37°$

Clave C

41.



- m∠CBP = 90° – θ
- m∠ABD = θ

$m\overset{\frown}{BD} = 2\theta \Rightarrow m\angle DCB = \theta$

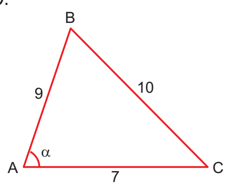
Luego, por propiedad tenemos:

$m\angle AIC = 90° + \dfrac{90°}{2} = 90° + 45° = 135°$

$\therefore x = 45°$

Clave E

42. Del △ABC:



Si α = 90°, entonces por el teorema de Pitágoras:

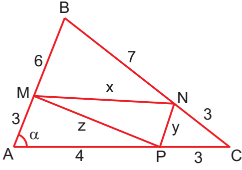
$(BC)^2 = 9^2 + 7^2$

⇒ BC = 11,4

Pero: BC = 10

⇒ α < 90°

Luego:



En el ΔAMP, si α = 90°, por el teorema de Pitágoras:

$z^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow z = 5$

Pero α < 90° ⇒ z < 5

Entonces el máximo valor entero de z es 4.

En el ΔNCP, por desigualdad triangular:

$3 - 3 < y < 3 + 3 \Rightarrow y < 6$

Entonces el máximo valor entero de y es 5.

En el ΔMNP, por desigualdad triangular:

$y - z < x < y + z$

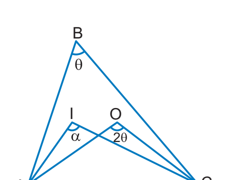
$5 - 4 < x < 5 + 4$

$1 < x < 9$

Por lo tanto, el máximo valor entero de x es 8.

Clave A

43.



Por dato: O es circuncentro e I es el incentro

$\Rightarrow \alpha = 90° + \dfrac{\theta}{2}$

Del enunciado:

m∠AIC + m∠AOC = 180°

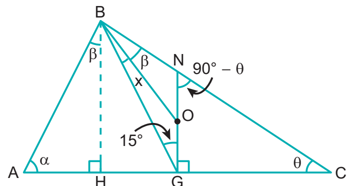
$90° + \dfrac{\theta}{2} + (2\theta) = 180°$

$\dfrac{5\theta}{2} = 90°$

$\therefore \theta = 36°$

Clave D

44.



Por dato: α – θ = 28°

Por propiedad: m∠ABH = m∠OBC = β

En el ◺AHB: β = 90° – α

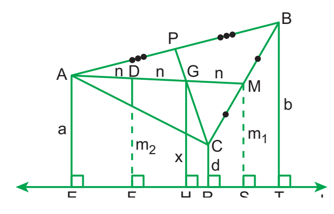
En el $\triangle GBN$:



$$x + \beta + 15° = 90° - \theta$$
$$x + (90° - \alpha) + 15° = 90° - \theta$$
$$x = \underbrace{\alpha - \theta}_{28°} - 15°$$
$$\therefore x = 13°$$

Clave D

45.



Por dato: G es baricentro del $\triangle ABC$

Además: $a + b + d = 42$

En el trapecio CRTB: $m_1 = \dfrac{d + b}{2}$ ...(1)

En el trapecio AEHG: $m_2 = \dfrac{a + x}{2}$ ...(2)

En el trapecio DFSM: $x = \dfrac{m_1 + m_2}{2}$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3), y reduciendo:

$$\Rightarrow x = \frac{a + b + d}{3}$$
$$x = \frac{42}{3}$$
$$\therefore x = 14$$

Clave B

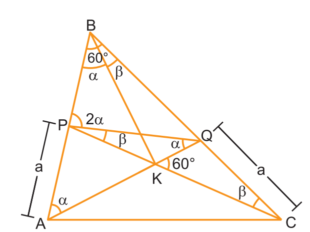
Nivel 3 (página 11) Unidad 1

Comunicación matemática

46.

47.

48. Sea: PQ = a



En el $\triangle BPC$: $2\alpha + 2\beta + 60° = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 60°$

Luego $m\angle QKC = 60°$

El ▱PBQK es inscriptible

De donde: $\triangle BKC$ es isósceles

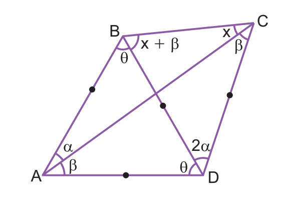
$\triangle AKB$ es isósceles $\Rightarrow AK = BK = KC$

$\therefore$ K es el circuncentro del $\triangle ABC$.

Clave B

Razonamiento y demostración

49.



De la figura:

$2\alpha + \beta = \alpha + \theta \Rightarrow \theta = \alpha + \beta$

$\therefore \triangle ABD$ es equilátero $\Rightarrow \theta = 60°$

$\triangle BDC$ es isósceles $\Rightarrow m\angle CBD = x + \beta$

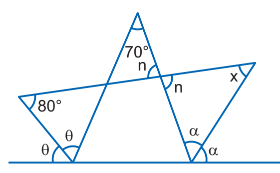
En el $\triangle BCD$:

$2x + 2\beta + 2\alpha = 180°$

$2x + 2(60°) = 180° \Rightarrow x = 30°$

Clave A

50.



Por propiedad:

$70° + 180° = 2\theta + 2\alpha$

$\theta + \alpha = 125°$

De la figura:

$80° + \theta = 70° + n$

Pero: $n = 180° - a - x$

$\Rightarrow 80° + \theta = 70° + 180° - \alpha - x$

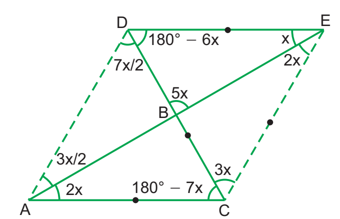
$\theta + \alpha + x = 170°$

$125° + x = 170°$

$x = 45°$

Clave C

51.



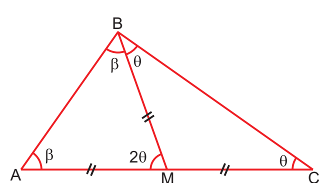
El $\triangle ACE$ es isósceles, entonces el $\triangle DCE$ es equilátero.

$3x = 60°$

$x = 20°$

Clave E

52.



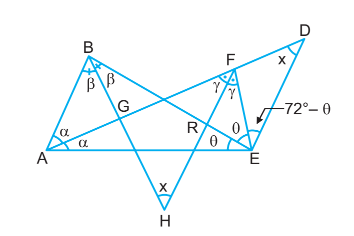
En el $\triangle ABM$:

$2\theta + 2\beta = 180° \Rightarrow \theta + \beta = 90°$

$\therefore m\angle ABC = 90°$

Clave B

53.



En la figura HBR - RFE:

$\beta + x = \gamma + \theta$ ... (1)

En la figura ABG - GFH:

$\alpha + \beta = x + \gamma$ ... (2)

Restando (2) – (1):

$x - \alpha = \theta - x$ ... (3)

$2x = \theta + \alpha$

En el $\triangle ADE$:

$\alpha + \theta + 72° + x = 180°$ ... (4)

Reemplazamos (3) en (4):

$72° + x + 2x = 180°$

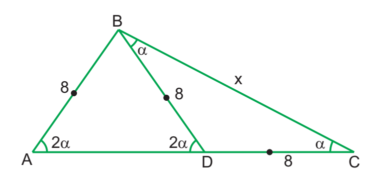
$3x = 108°$

$x = 36°$

Clave C

Resolución de problemas

54.



Como $2\alpha > \alpha$, entonces por correspondencia triangular: $x > 8$ ...(1)

Trazamos $\overline{BD}$ tal que: $m\angle DCB = m\angle CBD$

Entonces el $\triangle ABD$ resulta isósceles.

En el $\triangle BDC$, por desigualdad triangular:

$x < 8 + 8 \Rightarrow x < 16$ ...(2)

De (1) y (2): $8 < x < 16$

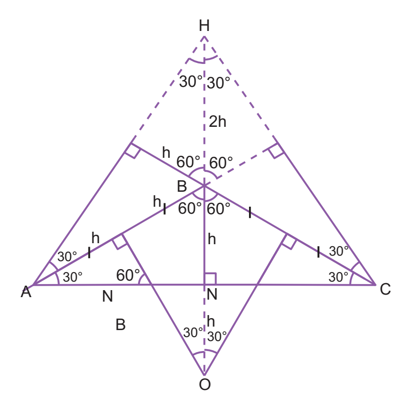
Valores enteros de x:

{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15}

Por lo tanto, un valor entero puede ser 15.

Clave E

55.



Del gráfico, O es el incentro y H el ortocentro del $\triangle ABC$.

Por dato: $HO = 12 \Rightarrow 4h = 12$

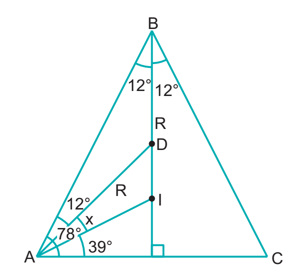
$h = 3$

Piden: $BN = h = 3$

$\therefore BN = 3$

Clave B

56.



Nos piden: x

Como D es circuncentro ⇒ AD = BD

△ADB: isósceles

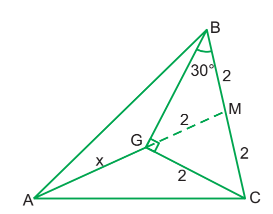
Como I es incentro ⇒ m∠BAI = 39°

Luego: x + 12° = 39°

∴ x = 27°

Clave C

57.



Nos piden: AG = x

G: baricentro

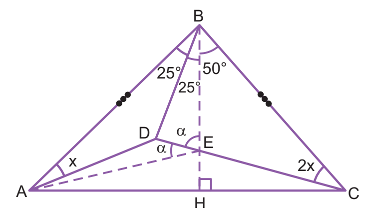
En el ◺BGC: GM = 2

Por propiedad: AG = 2(GM)

x = 4

Clave B

58.



Formamos el △ABC y trazamos la altura BH.

Luego: △ABE ≅ △CBE (caso LAL)

⇒ m∠BAE = m∠BCE = 2x

Entonces, D resulta ser el incentro del △ABE:

2x + 50° + 2α = 180°

x + α = 65° ...(1)

En el △BCE: 2x + 50° = α ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

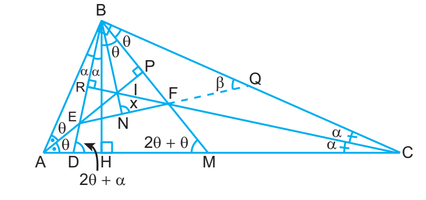
x + (2x + 50°) = 65°

3x = 15°

∴ x = 5°

Clave A

59.



Por dato, E y F son incentros de los triángulos AHB y BHC.

Del gráfico, los triángulos BAE y BCD son isósceles, entonces $\overline{AP}$ y $\overline{CR}$ son perpendiculares a $\overline{BM}$ y $\overline{BD}$, respectivamente.

En el △EBF, I resulta su ortocentro.

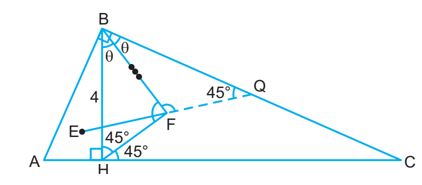
⇒ x = 90°

Además: I es incentro del ◺ABC

Entonces: m∠ABI = m∠QBI = 45°

⇒ β = 45°

Luego:



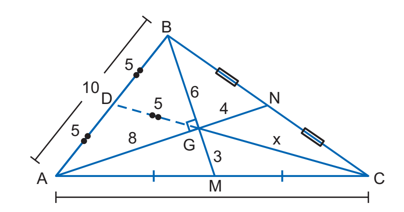
Del gráfico: △BFH ≅ △BFQ (caso ALA)

⇒ BQ = BH

∴ BQ = 4

Clave A

60.



Por dato: G es baricentro del △ABC

⇒ BG = 2GM = 2(3) ⇒ BG = 6

⇒ AG = 2GN = 2(4) ⇒ AG = 8

Por el teorema de Pitágoras: AB = 10

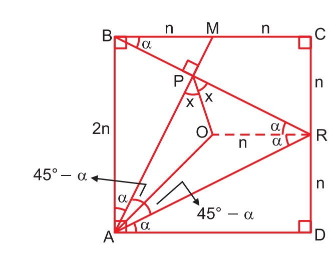
Por propiedad: AD = DB = DG = 5

Luego: CG = 2GD = 2(5)

∴ x = 10

Clave E

61.



Nos piden: x

m∠BAM = m∠CBR ⇒ △APB es recto en P.

Del gráfico:

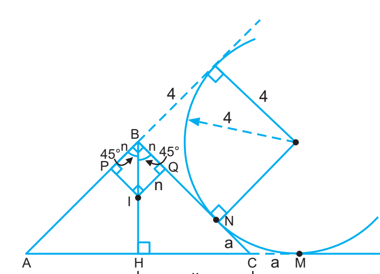
O: incentro del △PAR

⇒ 2x = 90°

x = 45°

Clave C

62.



Nos piden: x

Como I es incentro ⇒ AP = AH

De donde: n + 4 = x + a ...(1)

Además: QN = 4 – n

Pero: x = QN + a = 4 – n + a ...(2)

Reemplazamos (2) en (1):

n + 4 = 4 – n + a + a

n = a

En (1): n + 4 = x + n

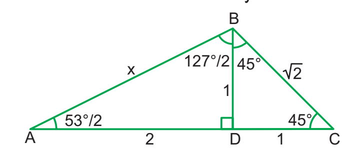
∴ x = 4

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 13) Unidad 1

1. Piden: AB

En el ◺ ADB notable de 53°/2 y 127°/2:

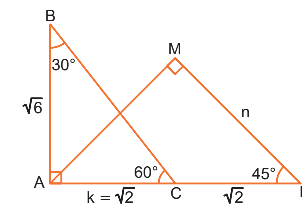


Del gráfico:
$x = \sqrt{5}$

Clave D

2. Piden: $n^2 + 1$

En el ◺ BAC notable de 30° y 60°:



$\Rightarrow k\sqrt{3} = \sqrt{6}$

$k = \sqrt{2}$

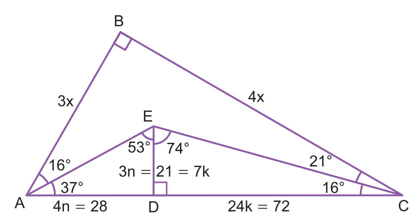
Luego en el ◺ AMD es notable de 45°: $n\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow n = 2$

Finalmente: $n^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$

Clave C

3. Piden: AB



En el ◺ EDC notable de 16° y 74°:

$7k = 21$

$k = 3$

$\Rightarrow DC = 24k = 24(3) = 72$

Luego en el ◺ ADE notable de 37° y 53°:

$3n = 21$

$n = 7$

$\Rightarrow AD = 4n = 4(7) = 28$

Finalmente en el ◺ ABC notable de 37° y 53°:

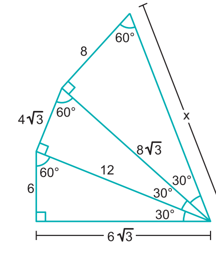
$5x = 28 + 72$

$x = 20$

Pero: $AB = 3x$ $\therefore$ $AB = 60$

Clave A

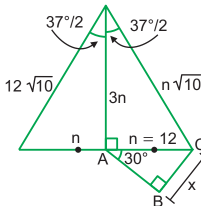
4. Piden: x.



Por triángulos rectángulos notables de 30° y 60°, se tiene que x = 16.

Clave C

5. Piden: x



Del gráfico: $n\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$

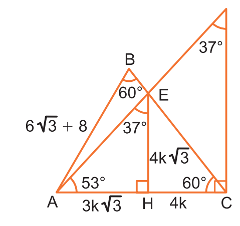
$n = 12$

En el ◺ ABC notable de 30° y 60°:

$x = 6$

Clave B

6. Piden: $EH = 4k\sqrt{3}$



Del gráfico:

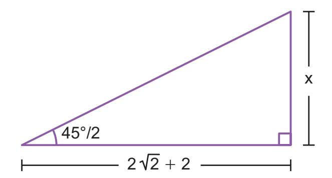
$3k\sqrt{3} + 4k = 6\sqrt{3} + 8$

$\Rightarrow k = 2$

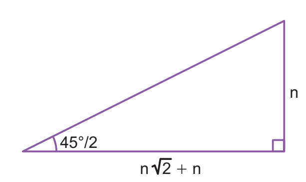
$\therefore EH = 8\sqrt{3}$

Clave C

7. Piden: x



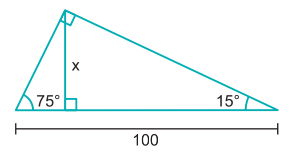
Recuerda:



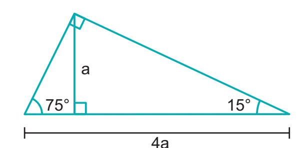
En el problema: x = 2

Clave A

8. Piden: $\sqrt{x}$



Recuerda en un triángulo rectángulo notable de 15° y 75° se cumple:

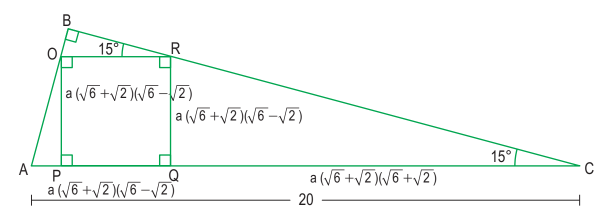


En el gráfico:
$x = 25$

Por lo tanto:
$\sqrt{x} = 5$

Clave A

9. Se grafica e ◺ ABC y se inscribe el cuadrado OPQR.



El ◺ ROC, es notable de 15° y 75°.

Si: $RQ = a(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow QC = a(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

El ◺ AOP, es notable de 15° y 75°.

Si: $OP = RQ = a(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, pues $\overline{RQ} \parallel \overline{OP}$ y $\overline{OR} \parallel \overline{PQ}$

$\Rightarrow AP = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Luego: $AC = AP + PQ + QC$

$20 = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + a(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
$+ a(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

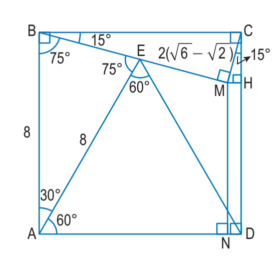
$20 = a[6 + 2 - \sqrt{12} + 6 - 2 + 6 + 2 + \sqrt{12}]$

$\Rightarrow a = 1$

Lado del cuadrado es: $PQ = a(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow PQ = 4$

Clave B

10. Trazamos $\overline{MH}$, perpendicular a $\overline{CD}$, luego el ⊿BMC y el ⊿CHM son notables de 15° y 75° ya que el △ABE es isósceles.



Si: BC = 8 ⇒ $CM = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Luego en el triángulo MCH:

$$CH = 2\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

⇒ CH = 2

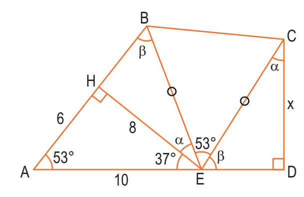
MN = x; MN = HD = x

HD = CD – CH

x = 8 – 2 ⇒ x = 6

Clave C

11. Trazamos la altura EH, por lo tanto el ⊿AHE es notable de 37° y 53°.



Si: AE = 10 ⇒ HE = 8

Luego sobre E:

$37° + \alpha + 53° + \beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

∴ m∠ ECD = α

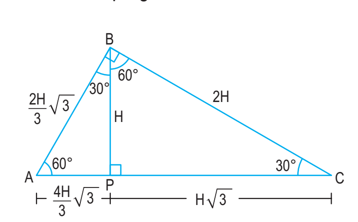
m∠ HBE = β

⇒ ⊿EDC ≅ ⊿HBE (caso ALA)

Ya que BE = EC ⇒ HE = CD ∴ x = 8

Clave A

12. Trazamos la altura relativa a la hipotenusa, los ángulos están en progresión aritmética.



⇒ m∠B = 90° (ángulo mayor)

m∠A = 90° – α

m∠C = 90° – 2α

Pero m∠A + m∠C = 90°

Reemplazando:

90°– α + 90°– 2α = 90°

⇒ α = 30°

∴ m∠A = 60°

El ⊿ABC es notable de 30° y 60°:

Si BP = H ⇒ B = 2H y $PC = H\sqrt{3}$

El ⊿BPA es notable de 30° y 60°:

Si BP = H ⇒ $BA = \frac{2H}{3}\sqrt{3}$ y

$AP = \frac{4H}{3}\sqrt{3}$

Perímetro: 2p = AB + BC + AC

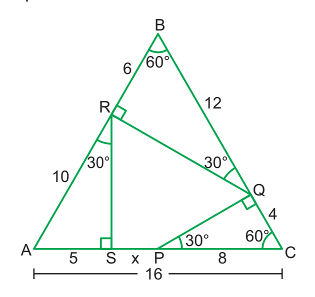
⇒ $2p = \frac{2H}{3}\sqrt{3} + 2H + \frac{4H}{3}\sqrt{3} + H\sqrt{3}$

⇒ $2p = 2H(\sqrt{3} + 1)$

Clave B

13. El perímetro es de 48 m ⇒ 48 = 3(lado), pues ABC es equilátero, entonces: lado = 16 m

P es punto medio de $\overline{AC}$ ⇒ AP = PC = 8 m



El ⊿PQC es notable de 30° y 60°.

Si: PC = 8 ⇒ QC = 4

BQ = BC – QC

BQ = 16 – 4 = 12

El ⊿BRQ es notable de 30° y 60°.

Si: BQ = 12 ⇒ RB = 6

RA = AB – RB

RA = 16 – 6 = 10

El ⊿ASR es notable de 30° y 60°.

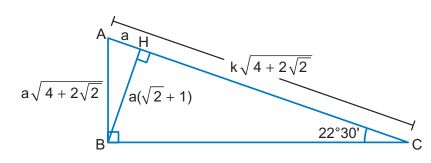
Si: RA = 10 ⇒ AS = 5

⇒ AP = AS + SP, pero AP = 8

Reemplazando: 8 = 5 + x ⇒ x = 3

Clave B

14.



El ⊿AHB es notable de 22,30°:

Si: AH = a ⇒ $AB = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$BH = a(\sqrt{2}+1)$

El ⊿ABC es notable de 22,30°.

Si: AB = k ⇒ $AC = k\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;

pero $k = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Reemplazando:

$AC = a(\sqrt{4+2\sqrt{2}})(\sqrt{4+2\sqrt{2}})$

$AC = a(4 + 2\sqrt{2})$

Dato: AC = 4 ⇒ $a = \frac{4}{4+2\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$;

⇒ $BH = (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

∴ $BH = \sqrt{2}$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 15) Unidad 1

Comunicación matemática

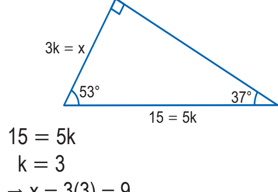
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

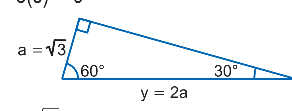
4.



15 = 5k

k = 3

⇒ x = 3(3) = 9

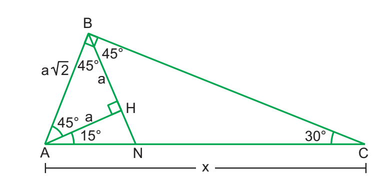


⇒ $y = 2\sqrt{3}$

∴ $x^2 + y^2 = 9^2 + (2\sqrt{3})^2 = 93$

Clave A

5.



En el ⊿ABC notable de 30° y 60°:

$x = 2a\sqrt{2}$

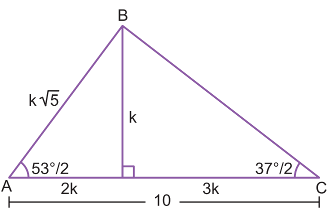
Por dato: $BH = a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⇒ $x = 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}$

x = 10

Clave B

6.



Del gráfico:

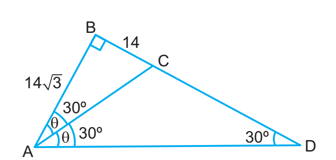
2k + 3k = 10

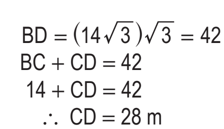
k = 2

∴ $AB = 2\sqrt{5}$

Clave A

7.

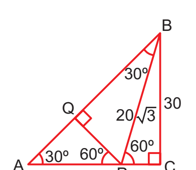




$BD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42$
$BC + CD = 42$
$14 + CD = 42$
$\therefore\ CD = 28$ m

Clave C

8.



Del gráfico:

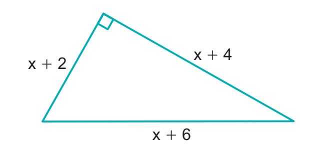
$PB = \dfrac{(2)30}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$

$PQ = \dfrac{20\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ PQ = 10\sqrt{3}$ m

Clave E

9.

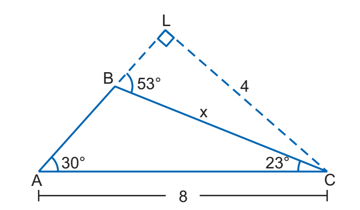


Por el teorema de Pitágoras:

$$(x + 2)^2 + (x + 4)^2 = (x + 6)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = x^2 + 12x + 36$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4$$

Clave B

10.



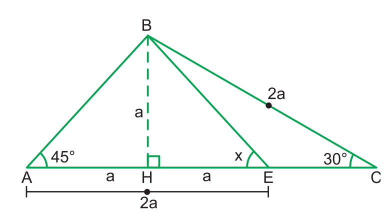
Se construye el ⊿ ALC:

$\Rightarrow LC = 8\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$

En el ⊿ BLC es notable de 37° y 53°: $x = 5$

Clave B

11.



Por dato: $AE = BC = 2a$

Trazamos: $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

En el ⊿ BHC notable de 30° y 60°:
$BH = a$

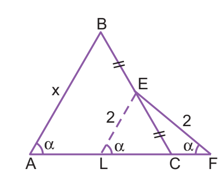
En el ⊿ AHB notable de 45°:
$AH = a \Rightarrow HE = a$

Luego, el ⊿ BHE es isósceles:
$\therefore\ x = 45°$

Clave B

Resolución de problemas

12.

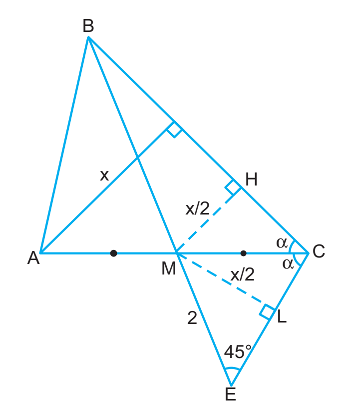


Trazamos $\overline{EL} \,//\, \overline{AB}$
$\Rightarrow m\angle ELC = \alpha$
$\Rightarrow \triangle LEF$ es isósceles
$EL = EF = 2$

Por el teorema de los puntos medios:
$x = 2(2) = 4$

Clave A

13.



Trazamos $\overline{MH} = \overline{BC}$, entonces por el teorema de los puntos medios:

$MH = \dfrac{x}{2}$

Trazamos $\overline{ML} \perp \overline{EC}$

$\Rightarrow ML = MH = \dfrac{x}{2}$

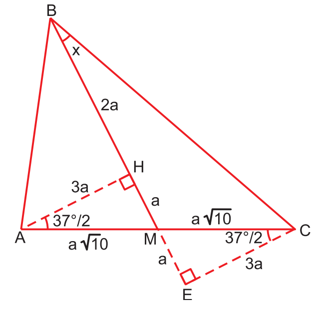
En el ⊿ ELM notable de 45°:

$\dfrac{x}{2} = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = 2\sqrt{2}$

Clave E

14.



En el ⊿ AHM notable de 37°/2:
$AH = 3a \wedge AM = a\sqrt{10}$

Trazamos $\overline{CE}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{BM}$.

En el ⊿ MEC notable de 37°/2:
$ME = a \wedge EC = 3a$

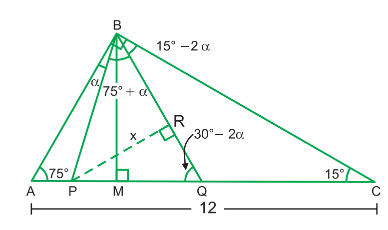
En el ⊿ BEC:

$\tan x = \dfrac{3a}{4a} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore x = 37°$

Clave D

15.



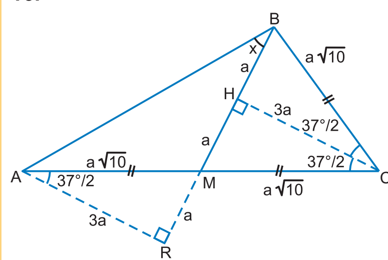
Del gráfico: $m\angle PBQ = 75° + \alpha$
Por ángulo exterior: $m\angle BPQ = 75° + \alpha$
$\Rightarrow \triangle BQP$ es isósceles ($BQ = PQ$)
$x = PR = BM$ (Propiedad)
En el ⊿ ABC notable de 15° y 75°:

$BM = \dfrac{12}{4} = 3$

$\therefore\ x = 3$

Clave C

16.



En el $\triangle BCM$ isósceles trazamos $\overline{CH} \perp \overline{BM}$
$\Rightarrow BH = HM$
Por dato: $AM = MC = BC$
Sea: $HM = a$
En el ⊿ MHC notable de 37°/2:
$MC = a\sqrt{10} = AM$
Prolongamos BM y formamos el ⊿ BRA.
En el ⊿ MRA notable de 37°/2:
$AM = a\sqrt{10}$
$\Rightarrow MR = a \wedge AR = 3a$
En el ⊿ BRA:
$AR = BR \Rightarrow x = 45°$

Clave C

Nivel 2 (página 16) Unidad 1

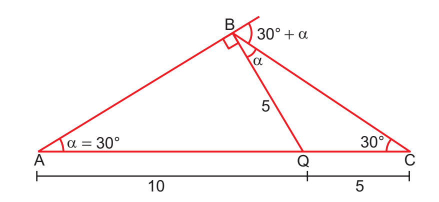
Comunicación matemática

17.

18.

Razonamiento y demostración

19.





Del gráfico:
$m\angle ACB = 30°$

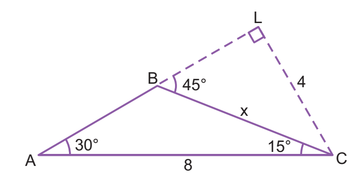
En el $\triangle ABC$:
$\alpha + 90° + \alpha + 30° = 180°$
$\alpha = 30°$

Entonces, el $\triangle BQC$ es isósceles:
$BQ = QC = 5$

En el ⊿ ABQ notable de 30° y 60°:
$AQ = 2(5) = 10$
$\therefore\ AC = 10 + 5 = 15$

Clave E

20.

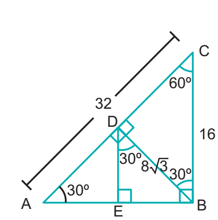


Se construye el ⊿ ALC
$\Rightarrow LC = \frac{8}{2} = 4$

En el ⊿ BLC notable de 45°: $x = 4\sqrt{2}$

Clave B

21.



Del gráfico:
$CB = \frac{32}{2} = 16$

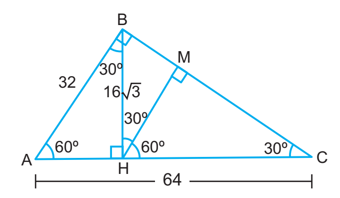
$DB = \frac{16}{2}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

$DE = \left(\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3}$

$\therefore\ DE = 12$

Clave E

22.



Del gráfico:

$AB = \frac{64}{2} = 32$

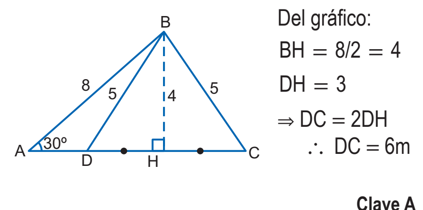
$BH = \frac{32}{2}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$HM = \frac{16\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})$

$\therefore\ HM = 24$ m

Clave C

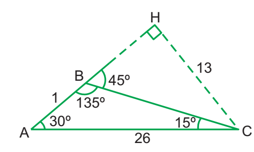
23.



Del gráfico:
$BH = 8/2 = 4$
$DH = 3$
$\Rightarrow DC = 2DH$
$\therefore\ DC = 6$m

Clave A

24.

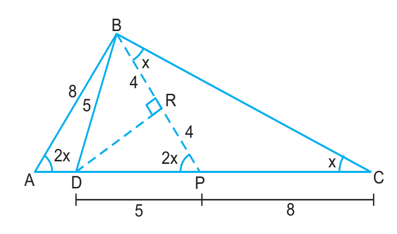


El ⊿BHC, resulta notable de 45°:
$\therefore\ BC = 13\sqrt{2}$ m

Clave E

Resolución de problemas

25.



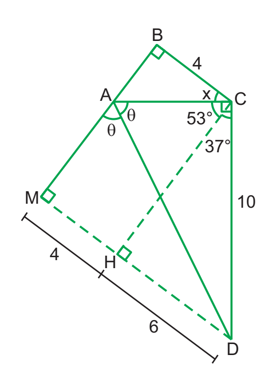
Trazamos $\overline{BP}$ de modo que el $\triangle ABP$ sea isósceles.
$\Rightarrow m\angle BPA = 2x\ \wedge\ m\angle PBC = x$
$AB = BP = PC = 8$

Trazamos $\overline{DR} \perp \overline{BP}$
$\Rightarrow BR = RP = 4$

En el ⊿ DRP notable de 37° y 53°: $2x = 37°$
$\therefore\ m\angle BAD = 2x = 37°$

Clave C

26.



Trazamos $\overline{DM}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{BA}$.

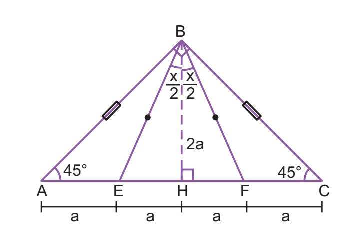
Por el teorema de la bisectriz:
$MD = 10$
$\overline{BC}\ //\ \overline{MH} \Rightarrow MH = 4\ \wedge\ HD = 6$

En el ⊿ CHD notable:
$m\angle DCH = 37° \Rightarrow m\angle ACH = 53°$

En la figura MBCH:
$53° + x = 90°$
$x = 37°$

Clave C

27.



Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
$\Rightarrow \overline{BH}$ es mediatriz
$\Rightarrow AB = BC\ (m\angle BCA = 45°)$

En el ⊿ BHC notable de 45°:
$BH = HC = 2a$

En el ⊿ BHF:
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{53°}{2}$

$\therefore x = 53°$

Clave B

Nivel 3 (página 17) Unidad 1

Comunicación matemática

28.

Tomamos la serie formada por los catetos menores:

Si: 3; 5; 7; 9; 11 $\Rightarrow$ 9 + 2 = 11
+2 +2 +2 +2

$\Rightarrow$ El término siguiente en el cateto menor sería 11.

Tomamos la serie formada por los catetos mayores:

Si: 4; 12; 24; 40; 60 $\Rightarrow$ 40 + 20 = 60
+8 +12 +16 +20 $\Rightarrow$ 16 + 4 = 20
+4 +4 +4

$\Rightarrow$ El término siguiente en el cateto mayor sería 60.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:
$11^2 + 60^2 = x^2 \Rightarrow x = 61$; la hipotenusa sería 61, además vemos en la serie de triángulos que la hipotenusa es igual al cateto mayor más uno.

29.

Tenemos la serie de catetos menores:

Si: 3; 5; 7; 9; 11; a_n
+2 +2 +2 +2 +2

$a_n = 3 + 2C_1^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 + 2 . \frac{(n-1)!}{(n-2)!\,1!}$

$\therefore\ a_n = 2n + 1$

Luego tomamos la serie de catetos mayores:

Si: 4; 12; 24; 40; b_n
+8 +12 +16 +20
+4 +4

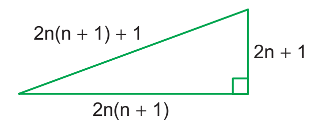
$b_n = 4 + 8\,C_1^{n-1} + 4C_2^{n-1}$

$\Rightarrow b_n = 4 + 8\frac{(n-1)!}{(n-2)!\,1!} + 4\frac{(n-1)!}{(n-3)!\,2!}$

$b_n = 4 + 8(n-1) + 2(n-1)(n-2)$

$\Rightarrow b_n = 2n(n+1)$

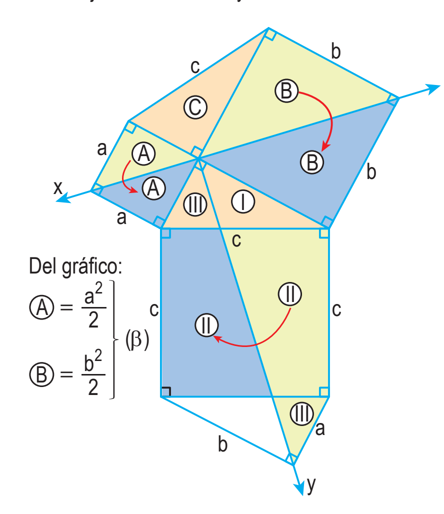
El término "n" de la serie sería: la hipotenusa es igual al cateto mayor más uno.



30.

Trasladamos el área (III) al lado del área (I) ya que ambos triángulos, superior e inferior al cuadrado más grande, son congruentes.

Duplicamos las regiones Ⓐ; Ⓑ y (II) con respecto a los ejes de simetría x e y.



Del gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} Ⓐ = \dfrac{a^2}{2} \\ Ⓑ = \dfrac{b^2}{2} \end{array}\right\} (\beta)$$

Vemos que el triángulo que contiene a las áreas (III) y (I) y el triángulo que contiene el área Ⓒ son congruentes.

$\Rightarrow$ sus hipotenusas miden: c

En el gráfico: $c^2 = 2$(II) y Ⓒ = (I) + (III) ... (α)

Dato: A + B + C = (I) + (II) + (III)

Reemplazando de (α):

Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ = (II) + Ⓒ

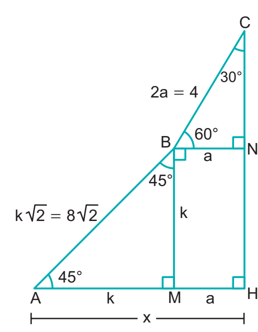
A + B = (II) $\Rightarrow$ Ⓐ + Ⓑ = $\dfrac{c^2}{2}$

Reemplazando de (β):

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 = c^2}_{\text{Teorema de Pitágoras}}$$

Razonamiento y demostración

31.



Del gráfico:

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$

$k\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow k = 8$

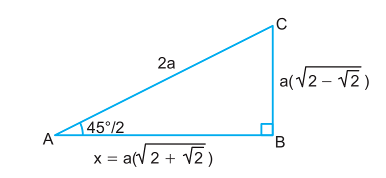
Piden:

$x = k + a = 8 + 2$

$\therefore x = 10$

Clave A

32.



Por dato: $AC = 6\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

Entonces:

$2a = 6\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \Rightarrow a = 3\sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$

Luego:

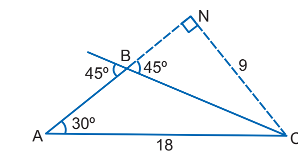
$x = a\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = \left(3\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

$x = 3\sqrt{2(4-2)} = 3(2)$

$\therefore x = 6$

Clave E

33.



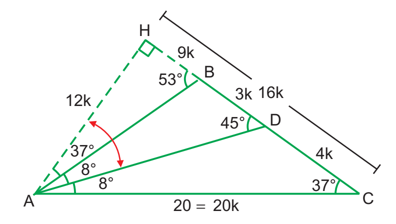
$NC = \dfrac{18}{2} = 9$

$BC = 9(\sqrt{2})$

$\therefore BC = 9\sqrt{2}$ m

Clave B

34.



Prolongamos $\overline{CB}$ y trazamos la perpendicular AH.

Sea: AH = 12k

Del ◺AHC: $20k = 20 \Rightarrow k = 1$

Del ◺AHB notable de 37° y 53°: HB = 9k

Del ◺AHD notable de 45°: HD = 12k

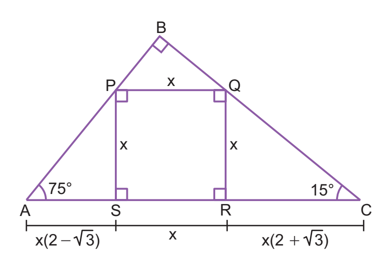
Entonces: BD = HD − HB = 12k − 9k

BD = 3k = 3(1)

$\therefore$ BD = 3

Clave A

35.



Por dato PQRS es un cuadrado:

$\Rightarrow SP = PQ = QR = RS = x$

En el ◺QRC notable de 15° y 75°:

$RC = x(2 + \sqrt{3})$

En el ◺PSA notable de 15° y 75°:

$AS = x(2 - \sqrt{3})$

Por dato: AC = 20

$\Rightarrow x(2 - \sqrt{3}) + x + x(2 + \sqrt{3}) = 20$

$5x = 20$

$x = 4$

Clave C

Resolución de problemas

36. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$y^2 = x^2 + 16^2$

$y^2 - x^2 = 16^2$

$(y + x)(y - x) = 16^2$

Dato: $y + x = 32$

$32(y - x) = (16)(16)$

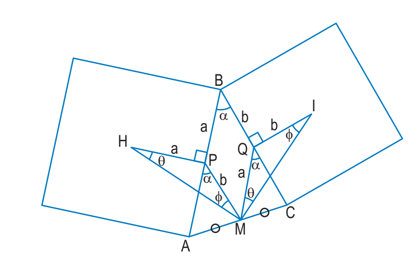
Tenemos el sistema de ecuaciones:

$\Rightarrow y - x = 8$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Dato: } y + x = 32 \\ \text{Por Pitágoras: } y - x = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2y = 40 \\ \Rightarrow y = 20 \\ \therefore x = 12 \text{ m} \end{array}$$

Clave B

37.



De la figura si: BA = 2a $\Rightarrow$ HP = BP = a

y BC = 2b $\Rightarrow$ BQ = QI = b.

Luego como $\overline{QM}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{PM}$ y P y Q son puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

$\Rightarrow$ PM = b y QM = a

Luego vemos que: $\Delta HPM \cong \Delta IQM$; (caso LAL)

$\Rightarrow$ HM = MI

38. Del ΔHPM: $\theta + \alpha + 90° + \phi = 180°$

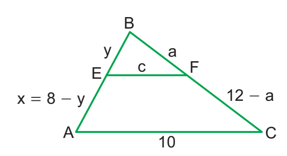
$\Rightarrow \alpha + \theta + \phi = 90°$

Del paralelogramo BPMQ: $m\angle PMQ = \alpha$

$\Rightarrow m\angle HMI = \phi + \alpha + \theta \Rightarrow m\angle HMI = 90°$

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 18) Unidad 1

1.



Como el cuadrilátero AEFC es un trapecio:
Entonces: $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$

Por propiedad:

$$\frac{y}{8-y} = \frac{a}{12-a} \Rightarrow 12y - ay = 8a - ay$$

$\Rightarrow 3y = 2a \;\Rightarrow\; y = 2k \;\wedge\; a = 3k$ ...(1)

Por dato, el $\triangle$EBF y el $\square$AEFC tienen igual perímetro:

$a + y + c = 8 - y + c + 12 - a + 10$
$2(a + y) = 30 \Rightarrow a + y = 15$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$3k + 2k = 15 \Rightarrow k = 3$
$\Rightarrow y = 2k = 2(3) = 6$

Además: AE + EB = AB
$x + 6 = 8 \Rightarrow x = 2$

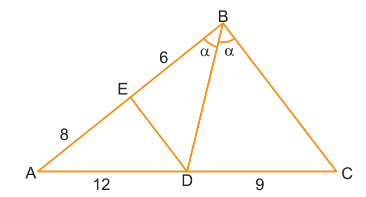
Piden: x/y

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Clave D

2. Piden: BC

Datos: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, por Thales:

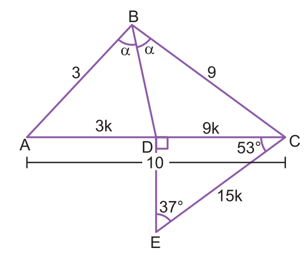
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{8}{EB} = \frac{12}{9} \Rightarrow EB = 6$$

Luego en el $\triangle$ABC, por el teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{14}{12} = \frac{BC}{9} \Rightarrow BC = 10{,}5$$

Clave B

3. Piden: CE



En el $\triangle$ABC (bisectriz interior):
AD = 3k; DC = 9k

Luego: AC = AD + DC

$$10 = 3k + 9k \Rightarrow k = \frac{5}{6}$$

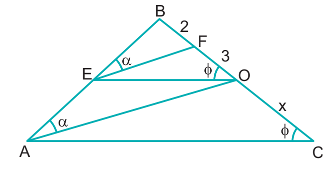
En el $\triangle$CDE (triángulo notable) de 37° y 53°:
Como DC = 9k
$\Rightarrow$ CE = 15k

Por lo tanto:

$$CE = 15\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{2}$$

Clave D

4. Piden: OC = x



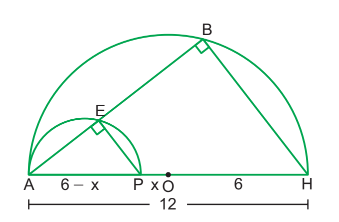
En el $\triangle$ABO: $\frac{BE}{EA} = \frac{2}{3}$

En el $\triangle$ABC: $\frac{BE}{EA} = \frac{5}{x}$

Luego: $\frac{BE}{EA} = \frac{2}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7{,}5$

Clave C

5.



Piden: PO = x

Del gráfico: $\overline{PE} \parallel \overline{HB}$

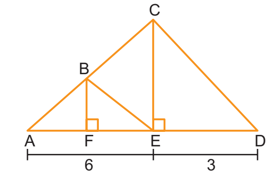
Entonces:

$$\frac{AE}{6-x} = \frac{EB}{x+6} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{6-x}{6+x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{6-x}{6+x} \Rightarrow x = 3$$

Clave B

6.



Piden: FE

Del gráfico: $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$,

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FE}$$

Como $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$:

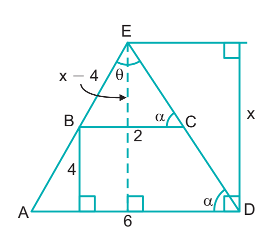
$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED} = \frac{6}{3} = 2$$

Luego: $\frac{AF}{FE} = 2 \Rightarrow AF = 2FE$

Entonces:
AE = AF + FE
$6 = 2FE + FE \Rightarrow FE = 2$

Clave B

7.



Por dato: ABCD es un trapecio.
$\Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

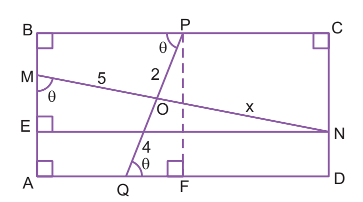
Del gráfico: $\Delta BEC \sim \Delta AED$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x} = \frac{2}{6} \Rightarrow 6x - 24 = 2x$$

$4x = 24$
$\therefore x = 6$

Clave D

8.



Por dato: AD = 2CD

Trazamos $\overline{EN}$ y $\overline{PF}$ paralelas a $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.

$\Rightarrow EN = AD \;\wedge\; PF = CD$

Del gráfico: $\triangle$MEN $\sim$ $\triangle$QFP

$$\Rightarrow \frac{EN}{PF} = \frac{5+x}{4+2}$$

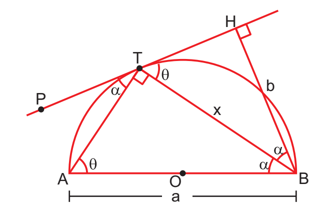
$$\frac{AD}{CD} = \frac{5+x}{6}$$

$$\frac{(2CD)}{CD} = \frac{5+x}{6} \Rightarrow 2 = \frac{5+x}{6}$$

$12 = 5 + x$
$\therefore x = 7$

Clave C

9. Piden: BT = x



Trazamos $\overline{AT}$, luego se determina el $\triangle$ATB.

Sea m$\angle$ABT = $\alpha \Rightarrow$ m$\angle$PTA = α

Sea m$\angle$TAB = $\theta \Rightarrow$ m$\angle$HTB = θ,

Además: m$\angle$TBH = α

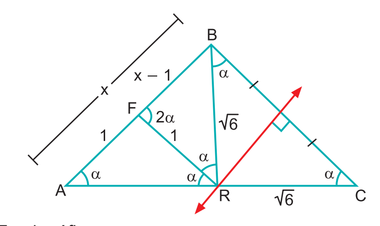
Del gráfico: $\triangle$ATB $\sim$ $\triangle$THB

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = ab$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

Clave E

10.



En el gráfico:

△FRB ~ △RBA

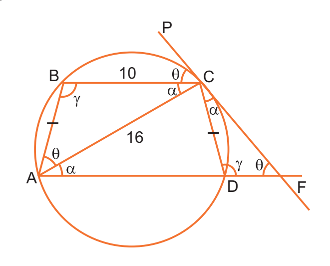
$\frac{BR}{AB} = \frac{FB}{BR} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{x} = \frac{x-1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow x(x-1) = 6$

$\therefore\ x = 3$

Clave A

11. Piden: AF



De la figura: AB = CD

Si: m∠CAD = α

$\Rightarrow m\overset{\frown}{CD} = 2\alpha$

$\Rightarrow m\angle DCF = \alpha \wedge m\angle ACB = \alpha$

Si: m∠BAC = θ

$\Rightarrow m\angle BCP = \theta \wedge m\angle CFD = \theta$

Luego: △ABC ~ △FDC

$\frac{10}{AB} = \frac{AB}{DF} \Rightarrow 10DF = AB^2$ ...(1)

$\frac{16}{FC} = \frac{10}{AB} \Rightarrow 16AB = 10FC$ ...(2)

De (1) y (2): $FC^2 = 25{,}6DF$ ...(3)

En el gráfico: $FC^2 = AF\,(DF)$

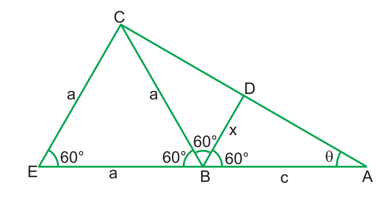
Reemplazando (3):

25,6DF = AF (DF)

∴ AF = 25,6

Clave E

12. Piden: BD = x



Trazamos $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$.

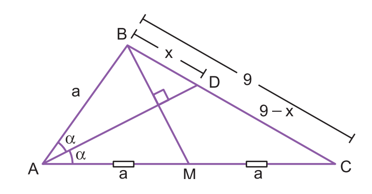
Luego el △ECB es equilátero.

Del gráfico: △ADB ~ △ACE:

$\frac{a}{x} = \frac{a+c}{c} \Rightarrow \frac{ac}{a+c} = x$

Clave E

13. Piden: BD = x



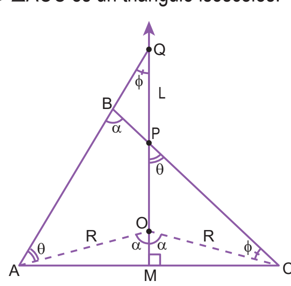
Del gráfico: △AMB isósceles

Luego en el △ABC, por el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{a}{x} = \frac{2a}{9-x} \Rightarrow x = 3$

Clave A

14. Como "O" es circuncentro del triángulo ABC entonces 2m∠ABC = m∠AOC, trazamos $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$ ⇒ ΔAOC es un triángulo isósceles.



⇒ m∠AOM = m∠COM = α

Luego: θ + ϕ = α ⇒ ΔAQO ~ ΔPCO

$\Rightarrow \frac{AO}{PO} = \frac{OQ}{OC}$; reemplazando:

$\therefore \frac{R}{8} = \frac{18}{R} \Rightarrow R = 12$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 20) Unidad 1

Comunicación matemática

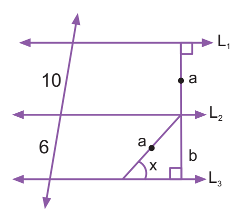
1.

2.

3.

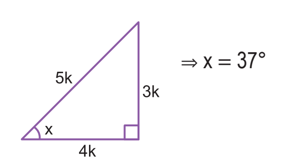
Razonamiento y demostración

4.



Del gráfico tenemos:

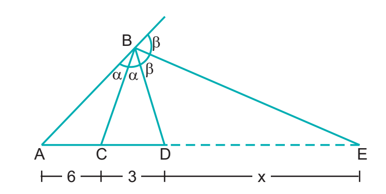
$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5k}{3k}$



⇒ x = 37°

Clave B

5.



Por cuaterna armónica:

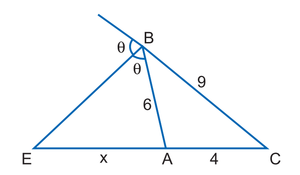
$\frac{AC}{CD} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{9+x}{x}$

2x = 9 + x

∴ x = 9

Clave D

6.



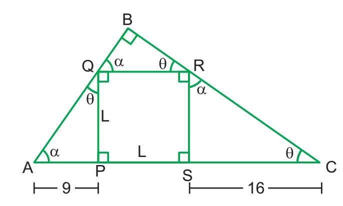
$\frac{9}{6} = \frac{x+4}{x}$

3x = 2x + 8

x = 8

Clave A

7.



Del gráfico:

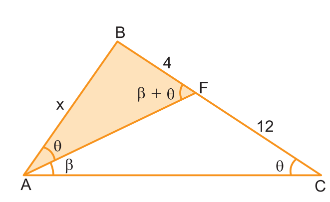
△APQ ~ △RSC

$\frac{L}{9} = \frac{16}{L} \Rightarrow L = 3\,(4)$

L = 12 m

Clave E

8.



Del gráfico: △ABF ~ △CAB:

$x^2 = 16\,(4)$

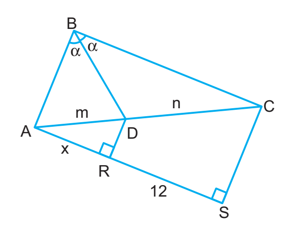
x = 4 (2)

x = 8

Clave B

Resolución de problemas

9.



Por el teorema de la bisectriz interior:

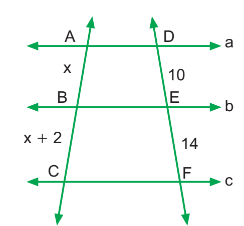
$\frac{AB}{BC} = \frac{5}{6} = \frac{m}{n}$

Luego tenemos: $\frac{x}{12} = \frac{m}{n} = \frac{5}{6}$

$\therefore x = 10$

Clave E

10.

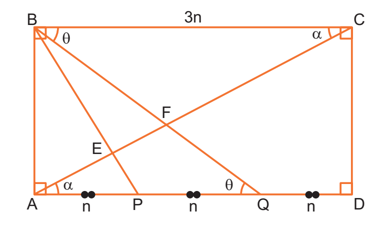


Por el teorema de Tales tenemos:

$\frac{x}{x+2} = \frac{10}{14} \Rightarrow x = 5$

Clave E

11.



Por dato: BD = 40

Como ABCD es un rectángulo, entonces:

AC = BD = 40

Luego: $\Delta BFC \sim \Delta QFA$

$\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{2n}{3n} \Rightarrow AF = 2k \wedge FC = 3k$

Del gráfico: AC = AF + FC

$40 = 2k + 3k$

$40 = 5k$

$\Rightarrow k = 8$

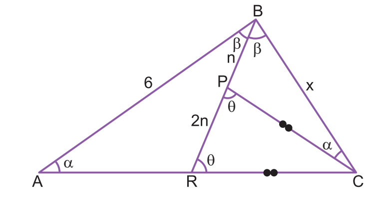
Piden:

AF = 2k = 2(8) = 16

$\therefore AF = 16$

Clave C

12.



El ΔPCR es isósceles: $m\angle CPR = m\angle PRC$

Luego se deduce que:

$m\angle ABR = m\angle PBC = \beta$

Entonces: $\Delta ARB \sim \Delta CPB$

$\Rightarrow \frac{3n}{6} = \frac{n}{x}$

$\therefore x = 2$

Clave C

Nivel 2 (página 21) Unidad 1

Comunicación matemática

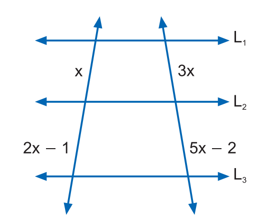
13.

14.

15.

Razonamiento y demostración

16.



Aplicando teorema de Thales:

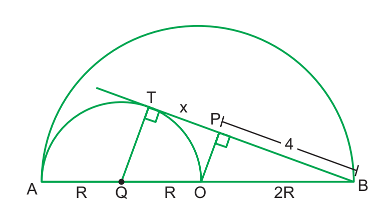
$\frac{x}{2x-1} = \frac{3x}{5x-2}$

$5x - 2 = 6x - 3$

$\Rightarrow x = 1$

Clave A

17.

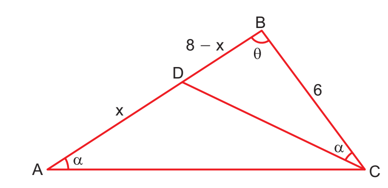


Por proporcionalidad:

$\frac{4}{x} = \frac{2R}{R} \Rightarrow x = 2$

Clave D

18.



Del gráfico: $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{6}{8-x}$

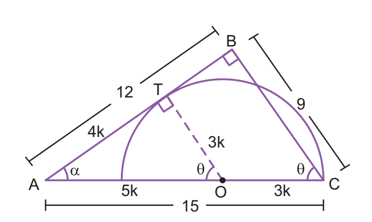
$\Rightarrow 36 = 64 - 8x$

$8x = 28$

$\therefore x = 3,5$

Clave D

19.



Del gráfico: $\triangle ABC \sim \triangle ATO$

$\Rightarrow 8k = 15$

$k = \frac{15}{8}$

Luego:

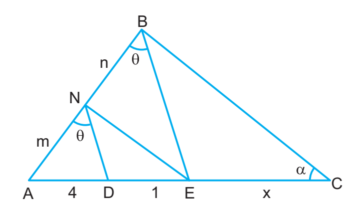
TB = 12 – 4k

$TB = 12 - 4\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{9}{2}$

$\therefore TB = 4,5$

Clave E

20.



Por corolario, sabemos:

$\frac{m}{5} = \frac{n}{x} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{5}{x}$ ...(1)

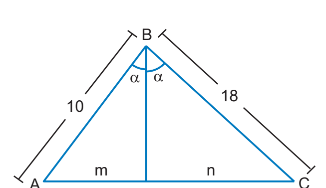
$\frac{m}{n} = \frac{4}{1}$ ...(2)

De (1) y (2): $4 = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5}{4} = 1,25$

Clave E

Resolución de problemas

21.



Por el teorema de la bisectriz interior:

$n - m = 6 \ \wedge \ \frac{10}{18} = \frac{m}{n} = \frac{5k}{9k}$

Luego:

$9k - 5k = 6$

$4k = 6$

$k = \frac{3}{2}$

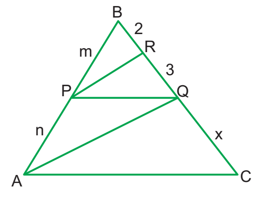
$\Rightarrow x = m + n$

$x = 14k = 14\left(\frac{3}{2}\right) = 21$

$\therefore x = 21$

Clave C

22.



Por proporcionalidad tenemos:

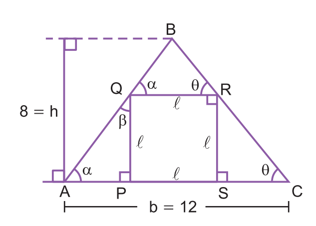
$$\frac{m}{n} = \frac{5}{x} \wedge \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{x}$$

$$\therefore x = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Clave D

23.



Del gráfico: △ABC ~ △QBR

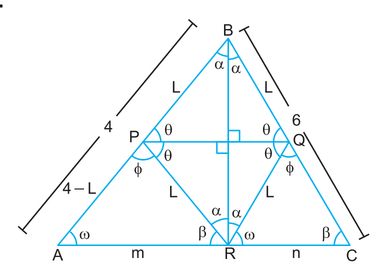
$$\frac{8}{8-\ell} = \frac{12}{\ell}$$

$$\Rightarrow 8\ell = 12(8) - 12\ell$$

$$\therefore \ell = 4{,}8 \text{ m}$$

Clave C

24.



Del gráfico: $\overline{AB}//\overline{RQ} \wedge \overline{BC}//\overline{PR}$

△APR ~ △RQC

$$\frac{L}{6-L} = \frac{4-L}{L}$$

$$L^2 = (4-L)(6-L)$$

$$10L = 24$$

$$L = 2{,}4$$

Clave D

Nivel 3 (página 22) Unidad 1

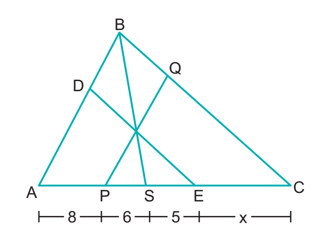
Comunicación matemática

25.

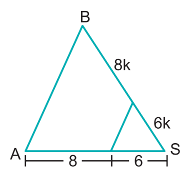
26.

Razonamiento y demostración

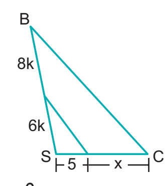
27.



Del triángulo ABS:



Luego, del triángulo SBC:

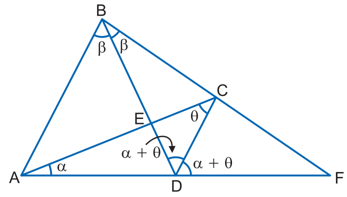


Entonces: $\frac{5}{x} = \frac{6}{8}$

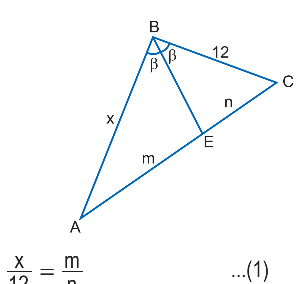
$$x = 6{,}\widehat{6}$$

Clave A

28.

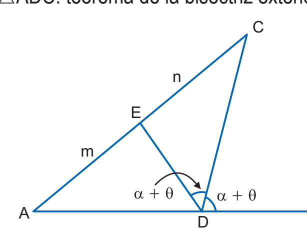


Del △ABC: teorema de la bisectriz interior.



$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{m}{n} \qquad ...(1)$$

Del △ADC: teorema de la bisectriz exterior.



$$\frac{AD}{m+n} = \frac{DE}{n}$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{m+n}{n} \qquad ...(2)$$

Dato: 5DE = 2AD $\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{5}{2}$

Reemplazando en (2):

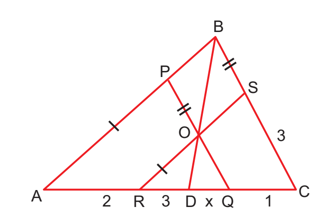
$$\frac{5}{2} = \frac{m+n}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \qquad ...(3)$$

Luego de (1) y (3):

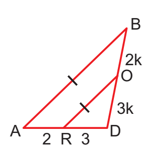
$$\frac{x}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 18$$

Clave D

29.



Del △ABD: Del △DBC:



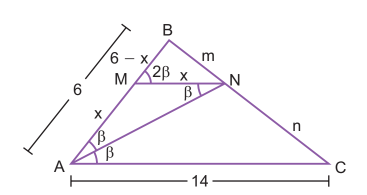
$$\Rightarrow \frac{x}{3k} = \frac{1}{2k}$$

$$x = 1{,}5$$



Clave A

30.



Del gráfico: △ABC ~ △MBN

$$\frac{x}{14} = \frac{6-x}{6}$$

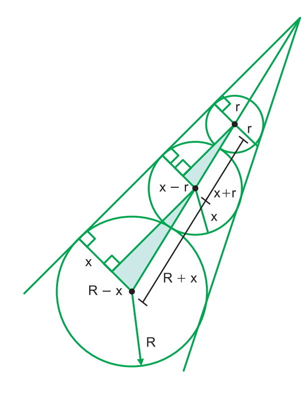
$$6x = 84 - 14x$$

$$20x = 84$$

$$x = 4{,}2 \text{ m}$$

Clave E

31. Piden: x



Los triángulos sombreados son semejantes, entonces:

$$\frac{R-x}{x-r} = \frac{R+x}{x+r}$$

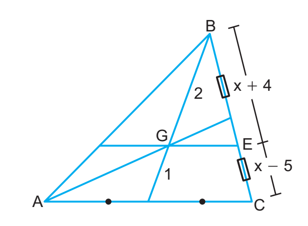
Resolviendo:

$$\therefore x = \sqrt{Rr}$$

Clave B

Resolución de problemas

32.



Del gráfico tenemos:

$$\frac{x+4}{x-5}=\frac{2}{1}$$

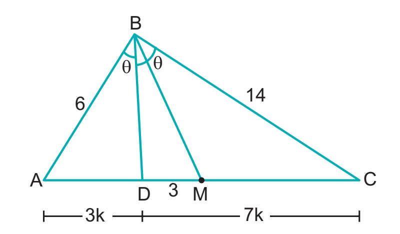
$$x+4=2x-10$$

$$14=x$$

Piden: $BC = 2x - 1 = 27$

Clave E

33.



Por el teorema de la bisectriz interior:
$AD = 3k \wedge DC = 7k$

Por dato: $\overline{BM}$ es mediana

$\Rightarrow AM = MC = 5k$

Del gráfico:

$AD + DM = AM$

$3k + 3 = 5k \Rightarrow 2k = 3$

$k = \frac{3}{2}$

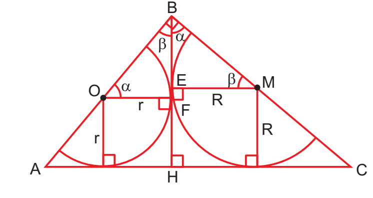
Piden:

$AC = 10k = 10\left(\frac{3}{2}\right) = 15$

$\therefore\ AC = 15$

Clave A

34. Piden: BH



$BE = BH - R$

$BF = BH - r$

$\Delta BFO \sim \Delta MEB \Rightarrow \frac{BF}{EM} = \frac{OF}{BE}$

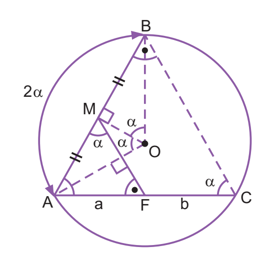
$$\frac{BH-r}{R}=\frac{r}{BH-R} \Rightarrow \frac{BH-r}{r}=\frac{R}{BH-R}$$

$$\left(\frac{BH}{r}-1\right)\left(\frac{BH}{R}-1\right)=1$$

$\therefore\ BH = R + r$

Clave D

35. Piden: AB



La $m\angle A$ es común para los triángulos ABC y AMF.

$\Rightarrow$ Del gráfico: $\Delta ABC \sim \Delta AFM$

$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AM}$ y como $AM = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \frac{(AB)(AB)}{2} = a(a+b)$

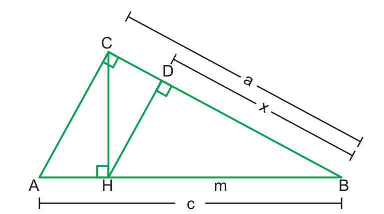
$(AB)^2 = 2a(a+b)$

$\therefore\ AB = \sqrt{2a(a+b)}$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 23) Unidad 1

1. Piden: x



Sea: HB = m

En el ◺ACB por relaciones métricas:
$a^2 = mc$ ...(1)

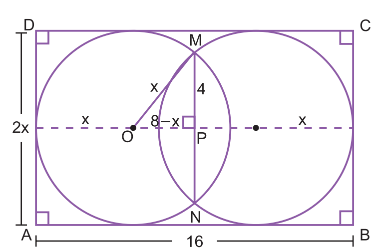
En el ◺BHC por relaciones métricas:
$m^2 = ax$ ...(2)

De (1) y (2):

$\therefore\ x = \dfrac{a^3}{c^2}$

Clave B

2.

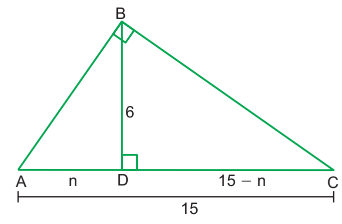


En el ◺MPO por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 4^2 + (8 - x)^2$

Resolviendo:
$\Rightarrow x = 5$
Piden: AD = 2x
$\therefore$ AD = 2x = 10 cm

Clave C

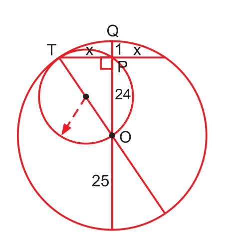
3.



Sea $\overline{AB}$ el menor cateto.
$6^2 = n(15 - n)$
$36 = 15n - n^2$
$n^2 - 15n + 36 = 0$
n ⟍ −12
n ⟋ −3
$\Rightarrow n = 3 \vee n = 12$
$(AB)^2 = (AD)(AC)$
$(AB)^2 = (3)(15) \Rightarrow AB = \sqrt{45}$
$\therefore AB = 3\sqrt{5}$

Clave A

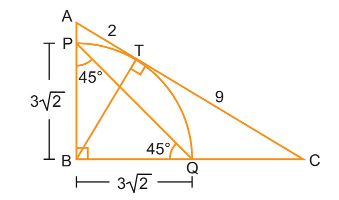
4.



$x^2 = (25 + 24)1$
$x = 7$

Clave E

5.

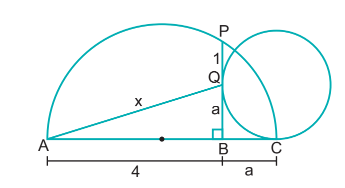


$(BT)^2 = 2(9)$
$BT = 3\sqrt{2}$

En el ◺PBQ:
$PQ = (3\sqrt{2})(\sqrt{2})$
$PQ = 6$

Clave B

6.



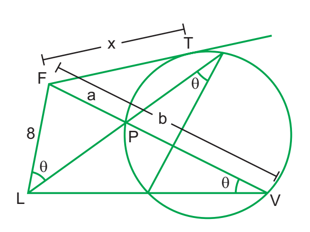
Por propiedad: QB = BC

$(a + 1)^2 = 4(a)$
$a^2 + 2a + 1 = 4a$
$a^2 - 2a + 1 = 0$
$(a - 1)^2 = 0$
$a = 1$

$\Rightarrow x^2 = 4^2 + a^2$
$x^2 = 16 + 1$
$x = \sqrt{17}$

Clave E

7.

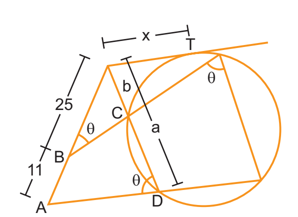


Teorema de la tangente: $x^2 = ba$

En el △LFV ~ △PFL
$8^2 = ba$
$\Rightarrow x^2 = 8^2$
$x = 8$

Clave D

8.

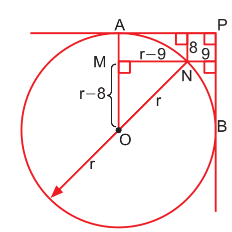


Teorema de la tangente:
$x^2 = ba$

El ▱ABCD es inscriptible:
$\Rightarrow 36(25) = ab$
$\Rightarrow x^2 = 36(25)$
$\therefore x = 30$

Clave B

9.

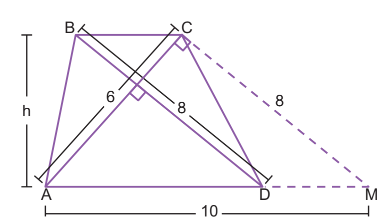


En el ◺OMN por teorema de Pitágoras:
$r^2 = (r - 8)^2 + (r - 9)^2$
$r^2 = 2r^2 - 34r + 145$
$0 = r^2 - 34r + 145$
$0 = (r - 5)(r - 29)$
$\Rightarrow r = 5 \vee r = 29$

Del gráfico se observa: r > 5
$\therefore$ r = 29 cm

Clave A

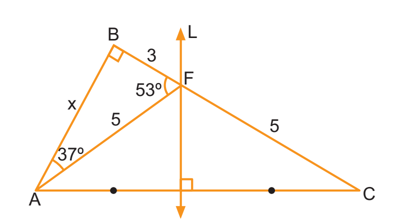
10.

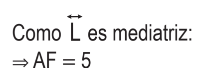


Se prolonga $\overline{AD}$ hasta M tal que $\overline{CM}$ // $\overline{BD}$.
El △ACM es un triángulo rectángulo:
$\Rightarrow$ CM = 8 y AM = 10
Por relaciones métricas en el ◺ACM:
(AM) h = (AC)(CM)
10h = 6(8)
$\therefore$ h = 4,8 cm

Clave D

11.



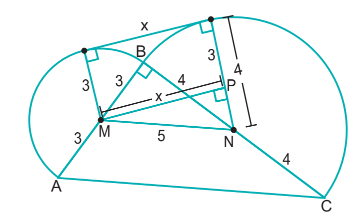


Como $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz:
$\Rightarrow AF = 5$

Luego el ⊿ABF es notable de 37° y 53°.
$\therefore AB = x = 4$

Clave B

12.

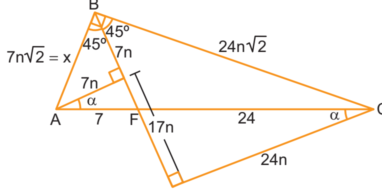


En el ⊿MBN por el teorema de Pitágoras:
$3^2 + 4^2 = (MN)^2 \Rightarrow MN = 5$

En el ⊿MPN por el teorema de Pitágoras:
$5^2 = x^2 + 1^2$
$\therefore x = 2\sqrt{6}$

Clave E

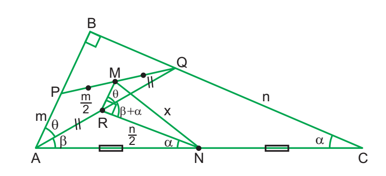
13.



Luego de completar las longitudes de los lados por semejanza de triángulos, por Pitágoras en el ⊿ABC:
$(7n\sqrt{2})^2 + (24n\sqrt{2})^2 = 31^2$
$\Rightarrow n = \dfrac{31}{25\sqrt{2}}$
$\therefore AB = x = 7\left(\dfrac{31}{25\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} = 8{,}68$

Clave A

14.



Se traza $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$, entonces:

$MR = \dfrac{m}{2}$ (base media del △AQP)

También:

$RN = \dfrac{n}{2}$ (base media del △CAQ)

Completando ángulos se obtiene que:
$m\angle MRN = 90°$

En el ⊿MRN, por teorema de Pitágoras:

$x^2 = \left(\dfrac{m}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{2}\right)^2$

$\therefore MN = x = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 25) Unidad 1

Comunicación matemática

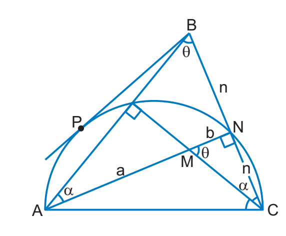
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



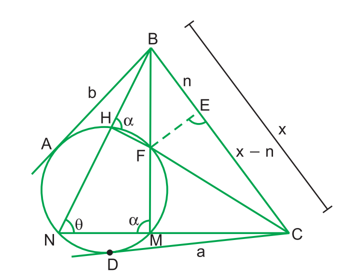
El △ABC es isósceles: AB = AC (dato)
Por el teorema de la tangente
$(BP)^2 = (BC)(BN) \Rightarrow (BP)^2 = (2n)(n)$
$(BP)^2 = 2n^2$ ...(1)

Del gráfico: el ⊿BNA ~ ⊿MNC
$\dfrac{n}{(a+b)} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow n^2 = b(a+b)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$(BP)^2 = 2b(a+b)$
$\therefore BP = \sqrt{2b(a+b)}$

Clave A

5.



Aplicamos el teorema de la tangente:
$a^2 = (CH)(CF) \quad \wedge \quad b^2 = (BM)(BF)$

Trazamos $\overline{FE}$, tal que: $m\angle NMF = m\angle FEC$
Del gráfico: los cuadriláteros MFEC y HFEB resultan ser inscriptibles, entonces por los vértices de cada cuadrilátero pasa una circunferencia.

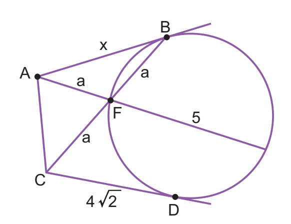
Luego, el teorema de la secante:

$\Rightarrow (BC)(BE) = (BM)(BF)$
$(x)(n) = b^2 \Rightarrow xn = b^2$ ...(1)
$\Rightarrow (CB)(CE) = (CH)(CF)$
$(x)(x - n) = a^2 \Rightarrow x^2 - xn = a^2$ ...(2)

Sumando (1) y (2):
$xn + x^2 - xn = b^2 + a^2$
$x^2 = a^2 + b^2$
$\therefore x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Clave D

6.

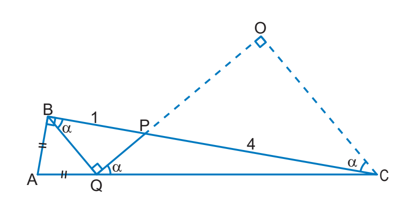


Por el teorema de la tangente:
$a(2a) = (4\sqrt{2})^2$
$2a^2 = 32$
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

Teorema de la tangente:
$x^2 = (5 + a)a$
$x^2 = 9(4) \Rightarrow x = 6$

Clave B

7. Del gráfico: $m\angle PBQ = m\angle PQC = \alpha$
$\Rightarrow (QC)^2 = (PC)(BC)$
$\therefore (QC)^2 = (4)(1 + 4)$
$QC = 2\sqrt{5}$



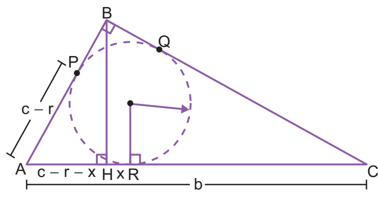
Veamos que: $\triangle PBQ \sim \triangle COP \Rightarrow \dfrac{PQ}{PO} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{1}{4}$
$\therefore PO = 4(PQ)$

Además: $(OC)^2 = (PO)(OQ)$
$\Rightarrow (OC)^2 = 4(PQ)5(PQ)$
$OC = 2\sqrt{5}\,(PQ)$

Finalmente:
$(QC)^2 = (QO)^2 + (OC)^2$
$\Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = (5PQ)^2 + (2\sqrt{5}(PQ))^2$
$\therefore 20 = 45(PQ)^2 \Rightarrow PQ = 2/3$

Clave B

8. Del gráfico:



$c^2 = (c - r - x)b$
$\dfrac{c^2}{b} = c - r - x$
$\Rightarrow x = \dfrac{c(b - c)}{b} - r$

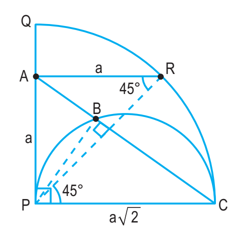
Clave C



9. Trazamos $\overline{PR}$: el ◺RAP es notable de 45°.
$\Rightarrow$ AR = AP = a
y PR = PC = $a\sqrt{2}$

Trazamos $\overline{PB} \perp \overline{AC}$; luego:
$(AB)(AC) = a^2$ ... (1)
$(BC)(AC) = (a\sqrt{2})^2$ ... (2)

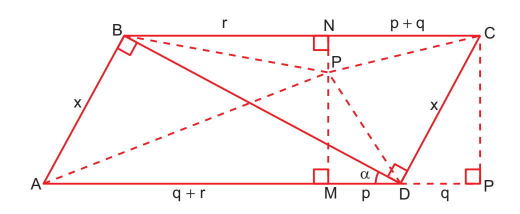
Dividimos (1) entre (2):
$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a^2}{2a^2} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$



Clave E

Resolución de problemas

10.



Trazamos $\overline{CP} \perp \overline{AD}$ y las alturas PN y PM $\Rightarrow$ $\Delta ABD \sim \Delta DPC$

$\therefore \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{DP} \Rightarrow$ (AD)(DP) = (AB)(CD); reemplazando:

$(p + q + r)(q) = x^2$ ... (1)

Luego: $(PA)^2 - (AM)^2 = (PD)^2 - (MD)^2$ ... (2)
$(PC)^2 - (NC)^2 = (PB)^2 - (NB)^2$ ... (3)

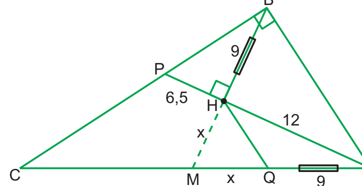
Sumamos (2) y (3):

$(PA)^2 + (PC)^2 - (AM)^2 - (NC)^2 = (PB)^2 + (PD)^2 - (MD)^2 - (NB)^2$
$75 + (q + r)^2 - (p + q)^2 = 43 - p^2 - r^2$
$\therefore 75 - 43 = (q + r)^2 + (p + q)^2 - p^2 - r^2 \Rightarrow 32 = 2q^2 + 2qr + 2pq$

De (I): $16 = q(p + q + r) = x^2$
$\therefore x = 4$

Clave B

11.



Por propiedad:
$(BH)^2 = (PH)(AH)$
$\Rightarrow (BH)^2 = (6{,}75)(12)$
$(BH)^2 = 81$
$\therefore$ BH = 9

Prolongamos $\overline{BH}$ hasta M; donde M es punto medio de $\overline{AC}$, porque el ⏢BHQA es un trapecio isósceles:

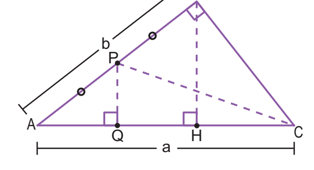
$\therefore$ ΔHMQ es un triángulo isósceles $\Rightarrow$ HM = MQ = x y BH = QA = 9

En el ◺MHA: $(HA)^2 + (HM)^2 = (MA)^2 \Rightarrow 12^2 + x^2 = (x + 9)^2$
$144 + x^2 = x^2 + 18x + 81$
$x = \dfrac{7}{2}$

Pero: CQ = 2x + 9 $\Rightarrow$ CQ = 16

Clave B

12. Del gráfico:
AP = PB, luego:
$(AP)^2 - (AQ)^2 = (PC)^2 - (QC)^2$
$(AP)^2 - (AQ)^2 = (PB)^2 + (BC)^2 - (QC)^2$
$(QC)^2 - (AQ)^2 = (BC)^2$



Del dato:
$(QC)^2 - (AQ)^2 = 729$
$\Rightarrow (BC)^2 = 729$
$\therefore$ BC = 27 ... (I)

Además: (BH)(AC) = (BC)(AB)

Reemplazando: (21,6)(a) = (27)(b)
4a = 5b $\Rightarrow$ a = 5k y b = 4k

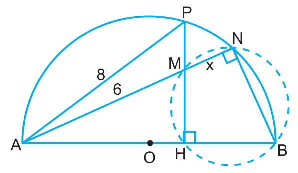
En el ΔABC: $(AC)^2 - (AB)^2 = (BC)^2$
$(5k)^2 - (4k)^2 = (27)^2 \Rightarrow k = 9$

a + b = 9k; reemplazando: a + b = 81

Clave C

13.

El cuadrilátero MNBH es inscriptible.
Por el teorema de las secantes:
(AN)(AM) = (AB)(AH)
(6 + x)(6) = (AB)(AH) ...(1)

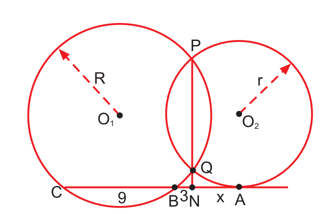


En el ◺AHP, por relaciones métricas:
$8^2 = (AH)(AB)$ ...(2)

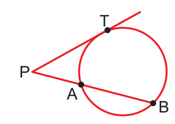
De (1) y (2):
$(6 + x)(6) = 8^2$
$(6 + x) = \dfrac{32}{3}$
$\therefore x = \dfrac{14}{3}$

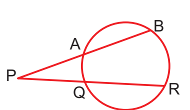
Clave E

14.



Por propiedad:





$(PT)^2 = (PB)(PA) \wedge (PB)(PA) = (PR)(PQ)$

En el gráfico:
Para la circunferencia de centro O_2:
$(x)^2 = (NP)(NQ)$ ...(1)

Para la circunferencia de centro O_1:
(NP)(NQ) = (NC)(NB)
$\Rightarrow$ (NP)(NQ) = (12)(3) ...(2)

De (1) y (2):
$x^2 = (12)(3) = 36$
$\therefore x = 6$

Clave B

Nivel 2 (página 26) Unidad 1

Comunicación matemática

15.

16.

Razonamiento y demostración

17.



En el gráfico, trazamos $\overline{NO}$ tal que $MO = MC$, luego ubicamos R tal que $BM = RM \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle RMO$

$\Rightarrow m\angle BMA = m\angle MRO \quad \therefore \overline{MC} \parallel \overline{RO}$

$\Rightarrow m\angle MOR = m\angle OMC = \alpha$ y $m\angle BAM = m\angle MAC = \alpha$

En el $\triangle ABC$: $\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AC}{MC} \Rightarrow (AB)(MC) = (AC)(BM)$

$(MC)^2 = (AC)(BM) \quad ...(I)$

En el $\triangle AMC$: $(MC)^2 = (NC)(AC)$

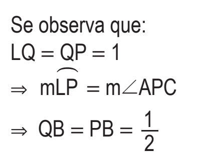
Reemplazando de (I): $(MC)^2 = (NC)(AC) = (AC)(BM) \Rightarrow BM = NC$

Finalmente: $(MC)^2 + (NC)^2 = (AM)^2 \Rightarrow (AB)^2 + (BM)^2 = (AM)^2$

Teorema de Pitágoras: $m\angle ABM = 90°$

Clave D

18.

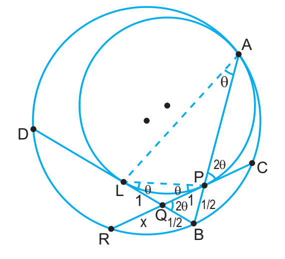


Se observa que:

$LQ = QP = 1$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{LP} = m\angle APC$

$\Rightarrow QB = PB = \dfrac{1}{2}$



En la circunferencia interior: $(PB)(AB) = (LB)^2$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} + AP\right) = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2$

$\therefore AP = 4$

Por propiedad: $m\overset{\frown}{RB} = m\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \triangle RQB \cong \triangle BPC$

$RQ = PC = x$

Finalmente:

$(PC)(RP) = (PB)(AP)$

$x(x + 1) = (1/2)(4)$

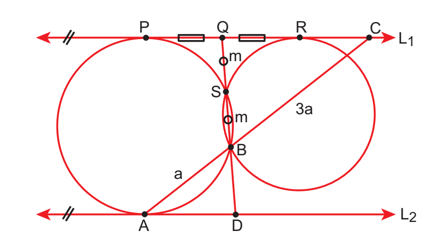
$x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\therefore x = 1$

Clave E

19. Del gráfico: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CBQ \therefore \dfrac{BD}{QB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{3a}$

Se deduce: $\dfrac{BD}{2m} = \dfrac{1}{3} \quad \therefore BD = \dfrac{2m}{3}$



Luego: $(PQ)^2 = (QS)(QB) \Rightarrow (PQ)^2 = (m)(2m) \therefore PQ = \sqrt{2}\,m = QR$

También: $(AD)^2 = (BD)(SD) \Rightarrow (AD)^2 = \left(\dfrac{2m}{3}\right)\left(m + \dfrac{2m}{3}\right) \therefore AD = \dfrac{\sqrt{10}\,m}{3}$

Finalmente: $\dfrac{QC}{AD} = \dfrac{3a}{a} \Rightarrow QC = 3(AD) \therefore QR + RC = 3\left(\dfrac{\sqrt{10}\,m}{3}\right)$

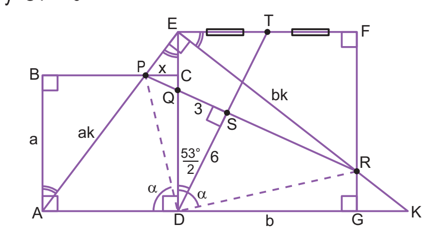
Reemplazando: $\sqrt{2}\,m + RC = \sqrt{10}\,m \Rightarrow RC = (\sqrt{10} - \sqrt{2})m$

$\therefore \dfrac{PQ}{RC} = \dfrac{\sqrt{2}\,m}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})m} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$

Clave A

20. El triángulo DET es notable de $\dfrac{53°}{2} \Rightarrow m\angle QDS = 53°/2$

$\therefore QS = 3$ y $ST = 6$



Por propiedad: $DT = QR \Rightarrow 12 = QS + SR \therefore SR = 12 - 3 = 9$

Luego: $\triangle ABP \sim \triangle EFR \Rightarrow \dfrac{AB}{EF} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{AP}{ER}$

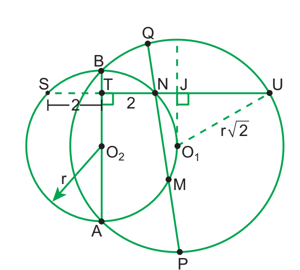
También: $\triangle DAP \sim \triangle DER \therefore m\angle ADP = m\angle RDE = \alpha \Rightarrow m\angle PDR = 90°$

En el ⊿PDR: $(DS)^2 = (PS)(SR) \therefore 6^2 = (PQ + 3)(9) \Rightarrow PQ = 1$

El ⊿PCQ es notable de 53°/2 $\Rightarrow PQ = \dfrac{x\sqrt{5}}{2} \therefore x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm

Clave A

21.



Del gráfico:

$2 + NJ = r \Rightarrow NJ = r - 2 \quad ...(1)$

$(PN)(NQ) = (JU + NJ)(JU - NJ) \Rightarrow 18 = JU^2 - NJ^2 \quad ...(2)$

$(O_1J)^2 = (O_1U)^2 - (JU)^2 = NJ(NJ + 4)$

$(r\sqrt{2})^2 - (JU)^2 = (r - 2)(r + 2) \Rightarrow (JU)^2 = r^2 + 4 \quad ...(3)$

(2) y (3) en (1):

$r^2 + 4 - (r - 2)^2 = 18$

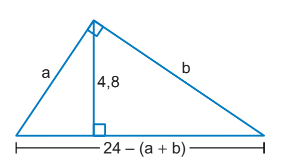
$r^2 + 4 - r^2 - 4 + 4r = 18 \Rightarrow r = \dfrac{9}{2}$

$\therefore AB = 2r = 9$

Clave C

Resolución de problemas

22.



Por propiedad:

$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{(4,8)^2} \Rightarrow (4,8)^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad ...(1)$



Por Pitágoras:
$a^2 + b^2 = (24 - (a + b))^2$ ...(2)

Operando resulta:
$\frac{48(a + b) - 24^2}{2} = ab$ ...(3)

Reemplazando (1) en (2) queda:
$ab = 4{,}8(24 - a - b)$ ...(4)

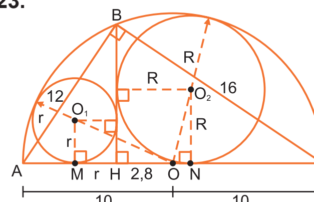
Igualando (3) y (4):
$\Rightarrow a + b = 14$ ...(5)

Reemplazando (5) en (4):
$ab = 48$ ...(6)

Los únicos valores enteros que cumplen (5) y (6) son:
$a = 6 \quad \wedge \quad b = 8$

Clave C

23.



Por el teorema de Pitágoras: AC = 20
En el ⊿ABC, se cumple:
$(AB)^2 = (AH)(AC)$
$12^2 = (AH)(20) \Rightarrow AH = 7{,}2$

Luego: AO = AH + HO
$10 = 7{,}2 + HO \Rightarrow HO = 2{,}8$

Además: $O_1O = 10 - r$
En el ⊿O_1MO por el teorema de Pitágoras:
$r^2 + (r + 2{,}8)^2 = (10 - r)^2$

Resolviendo: $r = 3{,}2$

Del gráfico: $OO_2 = 10 - R \wedge ON = R - 2{,}8$

En el ⊿ONO_2 por el teorema de Pitágoras:
$(R - 2{,}8)^2 + R^2 = (10 - R)^2$

Resolviendo: $R = 4{,}8$

Piden: $MN = r + R = 3{,}2 + 4{,}8 = 8$
$\therefore MN = 8$

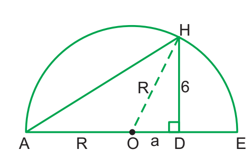
Clave D

24.
Por dato: ABCD es un cuadrado
$\Rightarrow AD = CD = R + a$

Por el teorema de Pitágoras:
En el ⊿ CDO: $(CO)^2 = a^2 + (R + a)^2$
En el ⊿ CTO: $(CT)^2 = (CO)^2 - R^2$

De estas dos expresiones:
$(CT)^2 = 2a^2 + 2Ra$ ...(1)

Luego:
En el ⊿ ADH por el teorema de Pitágoras:
$(AH)^2 = (R + a)^2 + 6^2$
$(AH)^2 = R^2 + 2Ra + a^2 + 36$ ...(2)

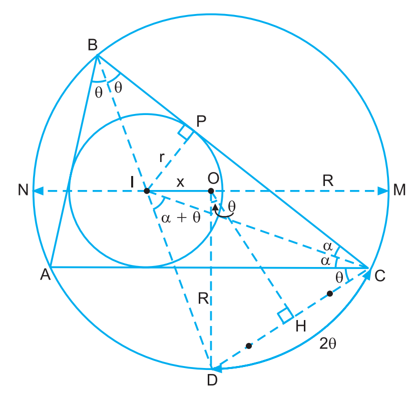


Piden: $AH^2 - CT^2$
De (1) y (2):
$AH^2 - CT^2 = R^2 - a^2 + 36$

En el ⊿ ODH por el teorema de Pitágoras:
$R^2 = a^2 + 6^2 \Rightarrow R^2 - a^2 = 36$
$\Rightarrow AH^2 - CT^2 = (36) + 36$
$\therefore AH^2 - CT^2 = 72$

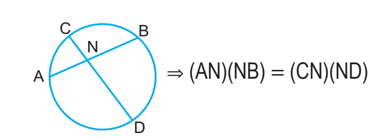
Clave E

25.



I: incentro del △ABC
O: circuncentro del △ABC

Por propiedad:



$\Rightarrow (AN)(NB) = (CN)(ND)$

En el gráfico:
$(BI)(ID) = (NI)(IM)$
$(BI)(ID) = (R - x)(R + x)$
$\Rightarrow (BI)(ID) = R^2 - x^2$ ...(1)

Además, el △IDC resulta ser isósceles.
$\Rightarrow ID = DC$

Luego: $DH = \frac{DC}{2} \Rightarrow DH = \frac{ID}{2}$

Del gráfico: ⊿ BPI ~ ⊿ OHD

$\frac{r}{BI} = \frac{DH}{R} \Rightarrow Rr = (BI)(DH)$

$\Rightarrow Rr = (BI)\left(\frac{ID}{2}\right) \Rightarrow (BI)(ID) = 2Rr$ ...(2)

De (1) y (2):
$R^2 - x^2 = 2Rr$
$x^2 = R^2 - 2Rr$
$\therefore x^2 = R(R - 2r)$

Clave C

26.
$(HB)(AC) = 91$

En el △AEH isósceles:
AB = BH
$\Rightarrow (AB)(AC) = 91$

▱EBCD: cuadrilátero inscriptible
$\Rightarrow (AE)(AD) = (AB)(AC)$
$x(x + 6) = (AB)(AC) = 91$
$x^2 + 6x - 91 = 0$
$(x - 7)(x + 13) = 0$
$x = 7 \vee x = -13$
$\therefore x = 7$

Clave C

Nivel 3 (página 26) Unidad 1

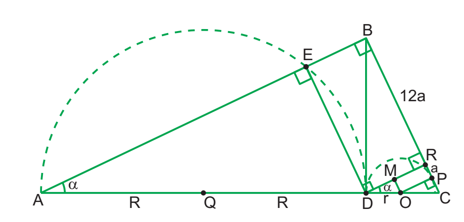
Comunicación matemática

27.

28.

Razonamiento y demostración

29.



De la figura $\triangle AED \sim \triangle DMO \Rightarrow \dfrac{ED}{MO} = \dfrac{AD}{DO} = \dfrac{2R}{r} = 12$

$\Rightarrow ED = 12(MO)$ y $BR = 12(MO)$

Luego: $BD = BR + RP \therefore BD = 12(MO) + MO \Rightarrow BD = 13(MO)$ ... (1)

En $\triangle ADB$: $\dfrac{1}{(ED)^2} = \dfrac{1}{(BD)^2} + \dfrac{1}{(AD)^2} \therefore \dfrac{1}{12^2(MO)^2} = \dfrac{1}{13^2(MO)^2} + \dfrac{1}{(AD)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{(2R)^2} = \dfrac{1}{(MO)^2}\left[\dfrac{1}{12^2} - \dfrac{1}{13^2}\right] \Rightarrow MO = \dfrac{5R}{78}$ ... (2)

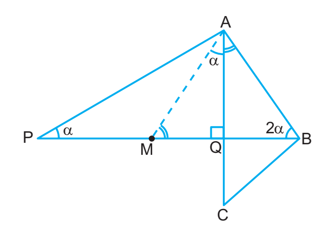
Reemplazando (2) en (1): $BD = 13\left(\dfrac{5R}{78}\right)$

$\therefore \dfrac{BD}{R} = \dfrac{5}{6}$

Clave D

30. Trazamos $\overline{AM}$ de modo que:

$m\angle MAQ = m\angle APQ = \alpha$



Luego: $(AQ)^2 = (MQ)(PQ)$

$(AB)^2 - (QB)^2 = (MB - QB)(PB - QB)$

$(AB - QB)(AB + QB) = (AB - QB)(PB - QB)$

$2QB = PB - AB$

Del dato: $PB - AB = 2\sqrt{AB^2 - QC^2} \Rightarrow 2(QB) = 2\sqrt{(AB)^2 - (QC)^2}$

$(QB)^2 = (AB)^2 - (QC)^2$

$\therefore (QC)^2 = (AB)^2 - (QB)^2 \Rightarrow (QC)^2 = (AQ)^2$

$QC = AQ = 6 \therefore AC = 12$

Clave B

31.

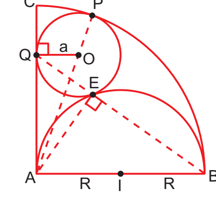
Del gráfico trazamos $\overline{QB}$ y $\overline{OQ}$:

B, E y Q son colineales

$\Rightarrow (OA)^2 = (QO)^2 + (QA)^2$

$(2R - a)^2 = a^2 + (2\sqrt{aR})^2$

$4R^2 = 8aR \Rightarrow R = 2a$



En el $\triangle QAB$: $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(2\sqrt{aR})^2} + \dfrac{1}{(2R)^2}$

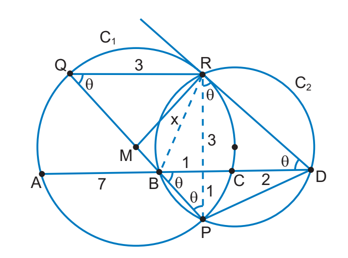
$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4aR} + \dfrac{1}{4R^2}$

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{8a^2} + \dfrac{1}{16a^2} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{16a^2}$

$\therefore x = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

Clave E

32.



Del dato: $\overline{BP} // \overline{DR}$

$\therefore$ ▭PBRD es un trapecio isósceles, además:

$m\angle DRP = m\angle RPQ = m\angle RQP = \theta \Rightarrow$ ▱QRP es isósceles

▱QRDP es un paralelogramo $\Rightarrow RD = QB$ y $BD = RP = QR = 3$

Luego: $(RD)^2 = (CD)(AD) \therefore (RD)^2 = (2)(10) \Rightarrow RD = QB = 2\sqrt{5}$

Además: $(QB)(BP) = (AB)(BC)$; reemplazando:

$(2\sqrt{5})(BP) = (7)(1)$

$\therefore BP = \dfrac{7\sqrt{5}}{10}$

Trazamos: $\overline{RM} \perp \overline{QP} \Rightarrow QM = MP$

Reemplazando: $2\sqrt{5} - MB = MB + 7\left(\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right) \Rightarrow MB = \dfrac{13\sqrt{5}}{20}$

Finalmente: $x^2 = (RM)^2 + (MB)^2$

$x^2 = (QR)^2 - (QM)^2 + (MB)^2$

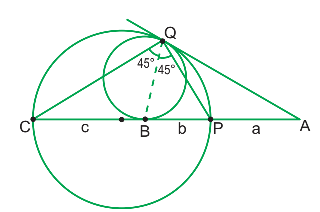
$x^2 = (QR)^2 - (2\sqrt{5} - MB)^2 + (MB)^2$

$x^2 = (QR)^2 + 4\sqrt{5}(MB) - 20 - (MB)^2 + (MB)^2$

$\therefore x = \sqrt{2}$

Clave E

33. Del gráfico: $AQ = AB = a + b$



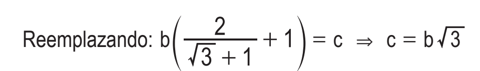
Luego: $(AQ)^2 = (AP \cdot AC)$

$(a + b)^2 = (a)(a + b + c)$

$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + ab + ac$

Tendremos: $b^2 + ab = ac \therefore b(a + b) = c$

$\Rightarrow b\left(\dfrac{b}{a} + 1\right) = c$; pero $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$



Reemplazando: $b\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}+1\right)=c \Rightarrow c=b\sqrt{3}$

Finalmente: $\dfrac{QC}{CB}=\dfrac{QP}{BP} \Rightarrow \dfrac{QC}{b\sqrt{3}}=\dfrac{QP}{b} \Rightarrow QC = QP\sqrt{3}$

El $\triangle PQC$ es notable de 30° y 60°

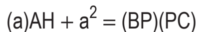
$\therefore\ m\angle QCA = 30°$

Clave C

34. Vemos que $\triangle AMH \sim \triangle BPH$

$\therefore\ \dfrac{AH}{BH}=\dfrac{b}{a} \Rightarrow a(AH)=BH(b)$

$\dfrac{a}{BP}=\dfrac{PC}{AH+a} \quad \wedge \quad \dfrac{b}{AM}=\dfrac{MC}{BH+b}$



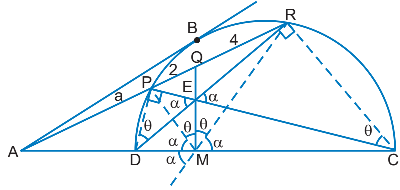
$(a)AH + a^2 = (BP)(PC)$

$(b)BH + b^2 = (AM)(MC)$

$(AM)(MC) - (BP)(PC) = b^2 - a^2$

Clave B

35.



En el ⊿ERC: $\alpha + \theta = 90°$

Luego, los cuadriláteros DPEM y CREM son inscriptibles.

Entonces en el $\triangle RPM$, se tiene una bisectriz interior y una bisectriz exterior, lo que forma una cuaterna armónica.

$\Rightarrow \dfrac{RQ}{QP}=\dfrac{RA}{PA} \Rightarrow \dfrac{4}{2}=\dfrac{6+a}{a}$

$4a = 12 + 2a$

$a = 6$

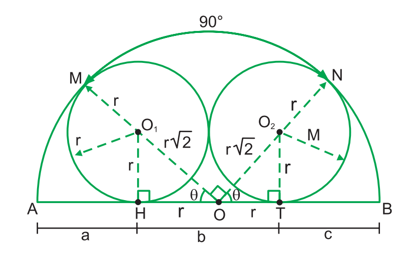
Por el teorema de la tangente se tiene:

$(AB)^2 = (AR)(AP)$

$(AB)^2 = (a+6)(a) = (6+6)(6) = 12\,(6) \qquad \therefore AB = 6\sqrt{2}$

Clave D

36.



Del gráfico: $O_1O = O_2O$

Entonces: ⊿$O_1HO \cong$ ⊿O_2TO (caso LL A)

$\Rightarrow m\angle O_1OH = m\angle O_2OT = \theta$

Además: $2\theta + 90° = 180°$

$\Rightarrow \theta = 45°$

$\Rightarrow O_1O = O_2O = r\sqrt{2} \wedge HO = OT = r$

Luego:

$b = 2r$

$a = r\sqrt{2}$ ...(2)

$c = r\sqrt{2}$ ...(3)

Multiplicando (2) y (3):

$ac = 2r^2$ ...(4)

Reemplazando (1) en (4):

$ac = 2\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

$\Rightarrow ac = \dfrac{b^2}{2}$

$\therefore b^2 = 2ac$

Clave C

37.

Por los datos:

$HP = 2$ y $OM = 6$

Trazamos $\overline{HQ} \perp \overline{OM}$:

$\therefore\ OQ = 4$ y $QM = 2$

Luego el ⊿HQO es notable de 37°.

$\Rightarrow HQ = PM = 3$

Además: $PR = HP = 2$

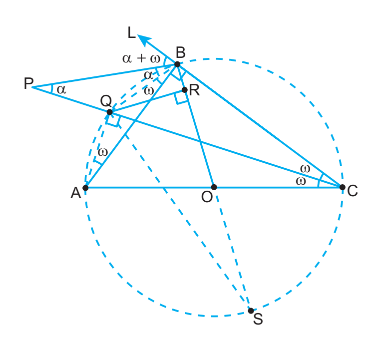
Luego N es punto medio de $\overline{CR}$ $\therefore$ $CN = NR = 8 \Rightarrow CP = 14$

En el ⊿CPM: $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 \Rightarrow (CM)^2 = 14^2 + 3^2$

$\therefore\ CM = \sqrt{205}$ m

Clave A

38.



P es el exentro del triángulo ABC.

$\Rightarrow m\angle BCQ = m\angle QCA = \omega \ \therefore\ m\angle PBL = m\angle PBA = \omega + \alpha$

$\overline{PB}$ es la bisectriz exterior del $\angle LBA \Rightarrow m\angle QPB = m\angle PBQ = \alpha$

$\therefore \triangle PQB$ y $\triangle AQB$ son isósceles $\Rightarrow PQ = QB = AQ = 6$

Trazamos el diámetro $\overline{BS}$: $(BS)(BR) = (QB)^2$

$(BS)(3) = 6^2 \Rightarrow BS = AC = 12$

En el $\triangle AQC$: $(AQ)^2 + (QC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow 6^2 + (QC)^2 = 12^2$

$(QC)^2 = 144 - 36$

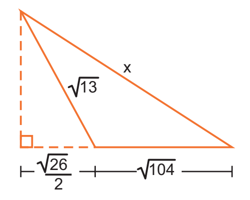
$\therefore QC = 6\sqrt{3}$ m

Clave D

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 28) Unidad 1

1.



$$x^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{104}\right)^2 + 2\left(\sqrt{104}\right)\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$$

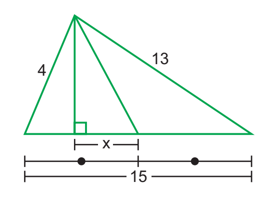
$x^2 = 13 + 104 + 52$

$x^2 = 169$

$x = 13$

Clave B

2.



Por propiedad:

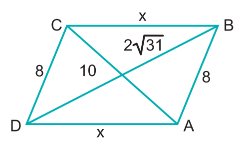
$13^2 - 4^2 = 2(15)x$

$153 = 30x$

$5{,}1 = x$

Clave E

3.



Teorema de Euler en un romboide:

$10^2 + (2\sqrt{31})^2 = 2(8^2 + x^2)$

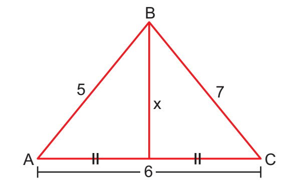
$224 = 2(8^2 + x^2)$

$48 = x^2$

$x = 4\sqrt{3}$

Clave B

4.



Por el teorema de la mediana:

$5^2 + 7^2 = 2x^2 + \frac{6^2}{2}$

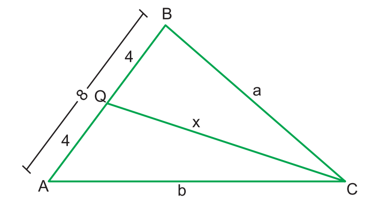
$25 + 49 = 2x^2 + 18$

$56 = 2x^2$

$\therefore x = 2\sqrt{7}$

Clave A

5.



Dato: $a^2 + b^2 = 100$

Por el teorema de la mediana:

$a^2 + b^2 = 2x^2 + \frac{8^2}{2}$

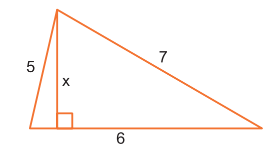
$100 = 2x^2 + 32$

$68 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 34$

$\therefore x = \sqrt{34}$

Clave B

6.



$p = \frac{5+6+7}{2} = 9$

$x = \frac{2}{6}\sqrt{9(9-5)(9-7)(9-6)}$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{9(4)(2)(3)} = \frac{6}{3}\sqrt{6}$

$\therefore x = 2\sqrt{6}$

Clave E

7. Piden: a

Dato: $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}\,bc$ ...(1)

Del dato se observa que el $\angle$A es obtuso.

Por teorema de Euclides (2.° caso), tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$ ...(2)

De (1) y (2):

$2bm = \sqrt{3}\,bc$

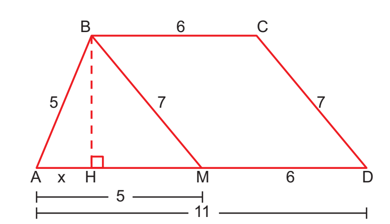
$m = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

De donde el ⊿BHA es notable de 30° y 60°.

$\therefore \alpha = 150°$

Clave B

8. Piden: x



Aplicamos el teorema de Euclides en el $\triangle$ABM:

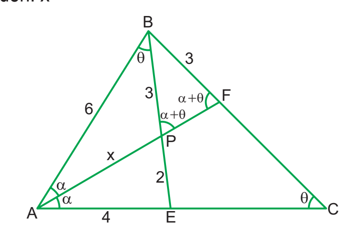
$7^2 = 5^2 + 5^2 - 2(5)(x)$

$49 = 50 - 10x$

$\therefore x = 0{,}1$

Clave B

9. Piden: x



Se observa que el $\triangle$PBF es isósceles.

$\Rightarrow$ BP = 3

Por teorema de la bisectriz interior: PE = 2

Finalmente, en el $\triangle$EAB por el teorema del cálculo de la bisectriz interior se tiene:

$x^2 = (AB)(AE) - (BP)(PE)$

$x^2 = (6)(4) - (3)(2)$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$

Clave C

10. Piden: máximo valor entero de x.

$\alpha < 90°$

Por existencia de triángulos:

$2 < x < 8$ ...(I)

Como $\alpha < 90°$ y BC debe tomar su máximo valor, esto ocurre cuando α sea lo más próximo a 90°.

Entonces:

$x^2 < 3^2 + 5^2$

$x^2 < 34$

$x < 5{,}830...$ ...(II)

De (I) y (II): $2 < x < 5{,}830...$

$\therefore$ Se concluye que el máximo valor entero para BC cuando α es agudo es 5.

Clave B

11. Piden el perímetro del triángulo: 2p.

x: es entero y $\alpha > 90°$

Sabemos:

$(x+1)^2 > x^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 2x + 1 > x^2 + x^2 - 2x + 1$

$4x > x^2$

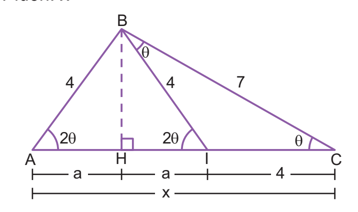
$\Rightarrow x < 4$ ...(1)

Por existencia:
- $x < 2x$
- $x - 1 < 2x + 1$
- $x + 1 < 2x - 1$

De la última inecuación se tiene:
$\Rightarrow 2 < x$ ...(2)
De (1) y (2): $2 < x < 4$
Como x es entero: $x = 3$
$\therefore 2p = 3x = 9$

Clave E

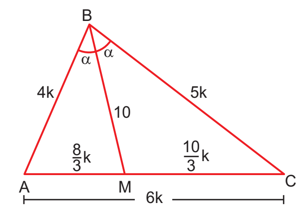
12. Piden: x



En el ΔABC trazamos $\overline{BI}$ tal que: AB = BI = 4
Luego, trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC} \Rightarrow HA = HI = a$
Por el teorema de Euclides en el ΔBIC tenemos:
72 = 42 + 42 + (2)(4)(a)
49 = 32 + 8a
$a = \dfrac{17}{8}$
Luego: $x = 2a + 4 = 2\left(\dfrac{17}{8}\right) + 4 = \dfrac{33}{4}$

Clave A

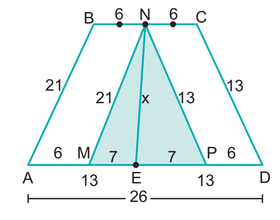
13. Piden: menor lado 4k



Por teorema para el cálculo de la bisectriz interior:
$10^2 = (4k)(5k) - \left(\dfrac{8}{3}\right)k\left(\dfrac{10}{3}\right)k$
$100 = 20k^2 - \dfrac{80}{9}k^2 \Rightarrow k = 3$
$\therefore 4k = 12$

Clave C

14. Piden: x



Sean N y E puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.
Por teorema de la mediana en el ΔMNP:
$MN^2 + NP^2 = 2x^2 + \dfrac{MP^2}{2}$
$21^2 + 13^2 = 2x^2 + \dfrac{14^2}{2}$
$\therefore x = 16$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 30) Unidad 1

Comunicación matemática

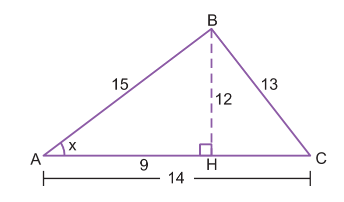
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

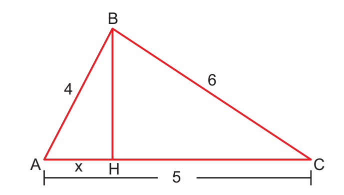
4.



En el ΔABC por el primer teorema de Euclides:
$13^2 = 15^2 + 14^2 - 2(14)(AH)$
$28(AH) = 252$
$\Rightarrow AH = 9$
Por el teorema de Pitágoras en el ⊿AHB: BH = 12.
Entonces el ⊿BHA resulta notable de 37° y 53°.
$\therefore x = 53°$

Clave C

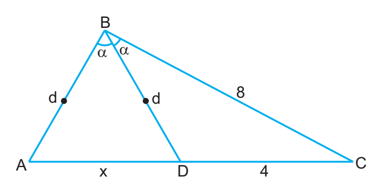
5.



En el ΔABC, por el primer teorema de Euclides:
$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2(5)(x)$
$10x = 5$
$\therefore x = \dfrac{1}{2}$

Clave A

6.



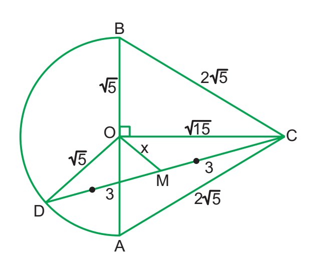
Por el teorema de la bisectriz interior:
$\dfrac{d}{8} = \dfrac{x}{4} \Rightarrow d = 2x$ ...(1)

Por el cálculo de la bisectriz interior:
$d^2 = (d)(8) - (x)(4)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$(2x)^2 = 8(2x) - 4x$
$4x^2 = 12x$
$4x = 12$
$\therefore x = 3$

Clave B

7.

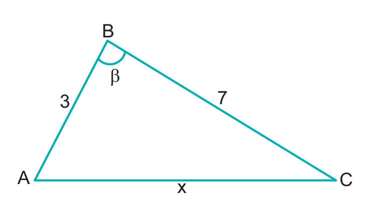


En el ΔDOC aplicamos el teorema de la mediana:
$DO^2 + OC^2 = 2OM^2 + \dfrac{DC^2}{2}$
$5 + 15 = 2x^2 + \dfrac{6^2}{2}$
$20 = 2x^2 + 18$
$\therefore x = 1$

Clave A

Resolución de problemas

8.

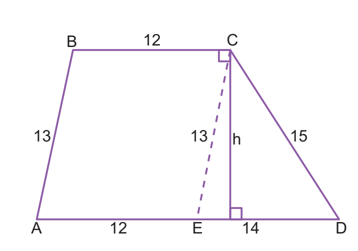


Ley de cosenos:
$x^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos\beta$
$\cos\beta = \dfrac{58 - x^2}{42}$

β es ángulo agudo:
$0° < \beta < 90° \Rightarrow 0 < \cos\beta < 1$
Luego:
$0 < \dfrac{58 - x^2}{42} < 1 \Rightarrow 4 < x < 7{,}6$
$\therefore AC_{máx.} = 7$

Clave D

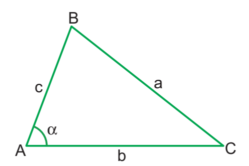
9.



Trazamos $\overline{CE}$ // $\overline{BA}$:
Teorema de Herón en el $\triangle$ECD:
$h = \dfrac{2}{14}\sqrt{(21)(7)(8)(6)} = 12$

Clave C

10.





Ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos\alpha)$ ...(1)

Dato:

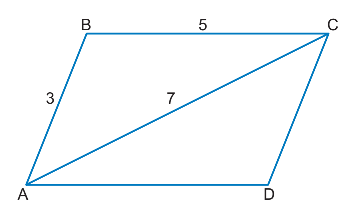
$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,bc$ ...(2)

Igualando (1) y (2):

$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135°$

Clave D

11.



$\angle A + \angle B = 180° \Rightarrow \angle B = 180° - \angle A$

Ley de cosenos:

$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos(180° - \angle A)$

$49 = 34 + 30\cos\angle A$

$\cos\angle A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 60°$

Clave D

Nivel 2 (página 30) Unidad 1

Comunicación matemática

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. De la figura se tiene por el teorema de la bisectriz interior:

$BP^2 = (AB)(BC) - (AP)(PC)$

Además: $PQ^2 = (AP)(PC)$

Dato: $BP = PQ$; $(AB)(BC) = 32$

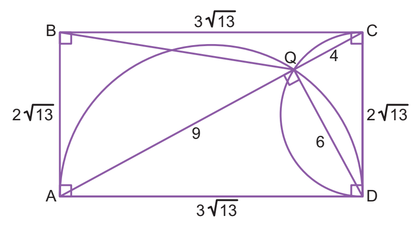
Entonces:

$BP^2 = 3^2 - PQ^2 = 3^2 - BP^2$

$BP^2 = 16 \Rightarrow BP = 4$

Clave D

15.



$QD^2 = (9)(4) = 36 \Rightarrow QD = 6$

Por el teorema de Pitágoras:
en el $\triangle AQD$ y $\triangle DQC$:

$AD = 3\sqrt{13} \wedge CD = 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow BC = 3\sqrt{13} \wedge AB = 2\sqrt{13}$

Por el teorema de Stewart en el $\triangle ABC$:

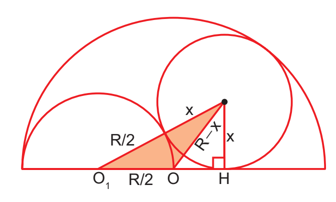
$(2\sqrt{13})^2(4) + (3\sqrt{13})^2(9) = BQ^2(13) + 4 \cdot 9 \cdot 13$

$16 + 81 = BQ^2 + 36$

$BQ^2 = 61 \Rightarrow BQ = \sqrt{61}$

Clave D

16.



Teorema de Herón:

$x = \dfrac{2}{R/2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{2} + R - x + \dfrac{R}{2} + x\right) = R$

Luego:

$x = \dfrac{4}{R}\sqrt{R(R/2)x(R/2 - x)}$

$x = 4\sqrt{\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{R}{2} - x\right)} \Rightarrow x^2 = 16\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{R}{2} - x\right)$

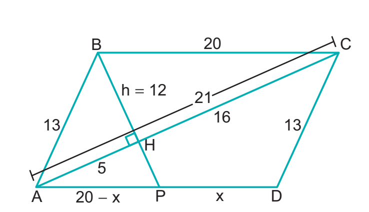
$x = 4R - 8x \Rightarrow x = \dfrac{4R}{9}$

Dato: $R = 9$

$\therefore x = 4$

Clave C

17.



Por el teorema de Herón:

$h = \dfrac{2}{21}\sqrt{(27)(14)(6)(7)} = 12$

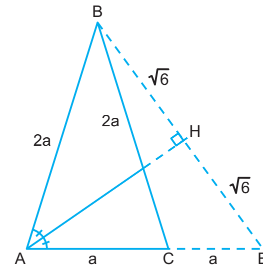
Luego, por semejanza: $\triangle AHP \sim \triangle BHC$

$\dfrac{20 - x}{5} = \dfrac{20}{16} \Rightarrow x = \dfrac{55}{4} = 13{,}75$

Clave D

Resolución de problemas

18.



$\overline{AH}$: mediatriz del $\triangle ABE$

Teorema de la mediana en el $\triangle ABE$:

$AB^2 + BE^2 = 2BC^2 + \dfrac{AE^2}{2}$

$(2a)^2 + (2\sqrt{6})^2 = 2(2a)^2 + \dfrac{(2a)^2}{2}$

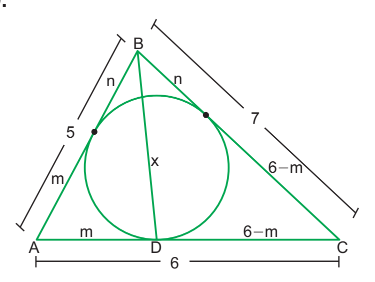
$4a^2 + 24 = 8a^2 + 2a^2$

$6a^2 = 24 \Rightarrow a = 2$

$\therefore AC = a = 2$

Clave C

19.



De la figura:

$m + n = 5$ ...(1)

$6 - m + n = 7$

$-m + n = 1$ ...(2)

Del (1) y (2): $n = 3$, $m = 2$

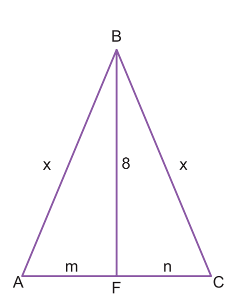
Teorema de Stewart:

$7^2(2) + 5^2(4) = 6x^2 + (2)(4)(6)$

$6x^2 = 150 \Rightarrow x = 5$

Clave D

20.



Teorema de Stewart:

$mx^2 + nx^2 = 64(m + n) + mn(m + n)$

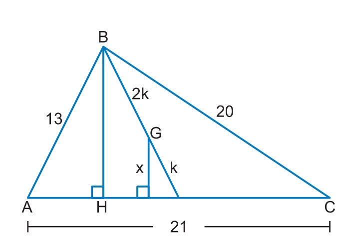
$x^2 = 64 + mn$

Dato: $mn = 20$

Luego: $x^2 = 84 \Rightarrow x = 9{,}16$

Clave C

21.



$p = \dfrac{13 + 20 + 21}{2} = 27$

Teorema de Herón:

$BH = \dfrac{2}{AC}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$BH = \dfrac{2}{21}\sqrt{(27)(14)(7)(6)} = 12$

Luego:

$x = \dfrac{BH}{3} = 4$

Clave C



Nivel 3 (página 31) Unidad 1

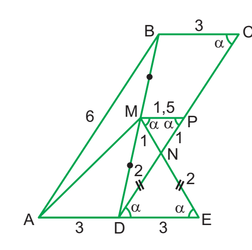
Comunicación matemática

22.

23.

Razonamiento y demostración

24.



Como: $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$

$m\angle NDE = m\angle BCD$

$m\angle PMN = m\angle NED$

Además:

$MP = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ (base media)

Como: $\triangle MPN \sim \triangle DNE$

$MP = \dfrac{DE}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{NE}{2}$

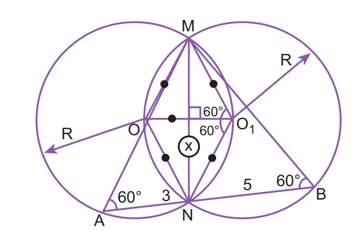
Teorema de la mediana en el $\triangle ADB$:

$$3^2 + 6^2 = 2AM^2 + \frac{BD^2}{2}$$

$\therefore 4AM_2 + BD^2 = 90$

Clave D

25.



Del gráfico tenemos que:

$OM = OO_1 = O_1M = R$

$\Rightarrow \triangle OMO_1$ es equilátero: $m\angle MO_1O = 60°$

También: $m\angle OO_1N = 60°$

Luego, en la circunferencia de centro O_1:

Por ángulo central: $m\widehat{MON} = 120°$

Por ángulo inscrito: $m\angle MBN = 60°$

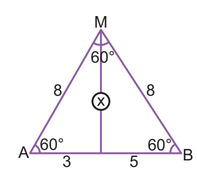
Análogamente, en la circunferencia de centro O:

$m\widehat{MO_1N} = 120° \Rightarrow m\angle MAN = 60°$

En el $\triangle AMB$: $m\angle AMB = 60°$

$\Rightarrow \triangle AMB$ es equilátero: $AM = MB = AB = 8$

Tenemos:



Teorema de Stewart:

$8^2 \,.\, 5 + 8^2 \,.\, 3 = x^2 \,.\, 8 + 3 \,.\, 5 \,.\, 8$

$\Rightarrow x = 7$

Clave E

26. Teorema de la mediana en el $\triangle AQD$:

$$AQ^2 + QD^2 = 2(OQ)^2 + \frac{AD^2}{2} = 100 \qquad ...(1)$$

Teorema de la mediana en el $\triangle BPC$:

$$PB^2 + PC^2 = 2(OP)^2 + \frac{BC^2}{2} \qquad ...(2)$$

Restando (2) de (1):

$$100 - (PB^2 + PC^2) = 2(OQ^2 - OP^2) + \frac{1}{2}(AD^2 - BC^2)$$

Como:

$AD = 2(OP)$; $BC = 2(OQ)$

Entonces:

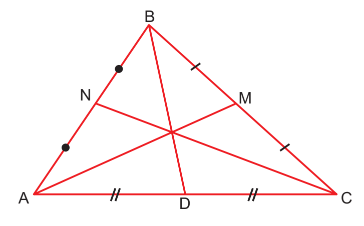
$100 - (PB^2 + PC^2) = 0$

$\therefore PB^2 + PC^2 = 100$

Clave C

Resolución de problemas

27.



Teorema de la mediana:

$AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + AC^2/2$

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2/2$

$AC^2 + BC^2 = 2NC^2 + AB^2/2$

Sumando las 3 ecuaciones:

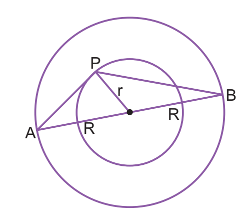
$$2(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2(AM^2 + BD^2 + CN^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

$$\frac{3}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2(AM^2 + BD^2 + CN^2)$$

$$\therefore AM^2 + BD^2 + CN^2 = \frac{3}{4}(28) = 21$$

Clave B

28.



Del enunciado: $k = AP^2 + PB^2$

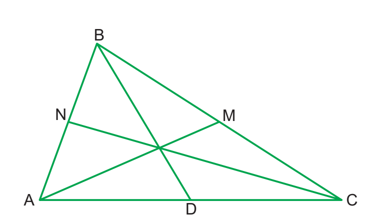
Teorema de la mediana:

$$AP^2 + BP^2 = 2r^2 + \frac{(2R)^2}{2}$$

$\therefore k = 2(R^2 + r^2)$

Clave C

29.



Por el teorema de la mediana en el $\triangle ABC$:

$AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + AC^2/2 \qquad ...(1)$

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2/2 \qquad ...(2)$

$AC^2 + BC^2 = 2NC^2 + AB^2/2 \qquad ...(3)$

Sumando las ecuaciones (1), (2) y (3):

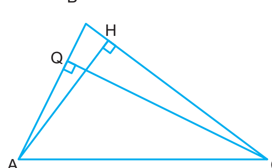
$$2(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2(AM^2 + BD^2 + CN^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = \frac{4}{3}\underbrace{(AM^2 + BD^2 + CN^2)}_{81}$$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 108$

Clave A

30.



Por el primer teorema de Euclides, se cumple:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AQ) \quad ...(1)$

$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2(CB)(CH) \quad ...(2)$

Sumando (1) y (2):

$0 = 2(AC)^2 - 2(AB)(AQ) - 2(CB)(CH)$

$\Rightarrow (AC)^2 = (AB)(AQ) + (CB)(CH)$

Por dato: $AB \,.\, AQ = 24 \wedge CB \,.\, CH = 25$

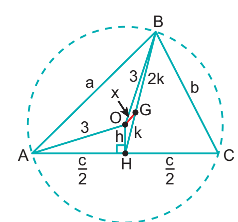
$\Rightarrow (AC)^2 = 24 + 25 = 49$

$(AC)^2 = 49$

$\therefore AC = 7$

Clave C

31.



O es el circuncentro y G el baricentro del $\triangle ABC$.

Aplicamos el teorema de la mediana en el $\triangle ABC$:

$\therefore\ a^2 + b^2 = 2(3k)^2 + c^2/2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 18k^2 + c^2/2$

Sumamos a ambos miembros c^2:

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 18k^2 + c^2/2 + c^2$

Pero del dato: $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

Reemplazando:

$9 = 18k^2 + 3c^2/2 \Rightarrow 6k^2 = 3 - c^2/2 \qquad ...(1)$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el ⊿AHO:

$$3^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 9 - c^2/4 \qquad ...(2)$$

Aplicamos el teorema de Stewart en el $\triangle HOB$:

$\therefore\ h^2(2k) + (3)^2(k) = x^2(3k) + (3k)(k)(2k)$

$2h^2 + 9 = 3x^2 + 6k^2$

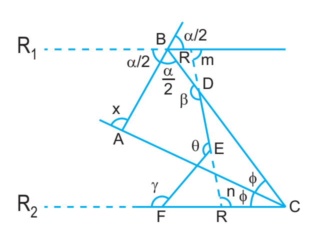
Reemplazando de (1) y (2):

$18 - c^2/2 + 9 = 3x^2 + 3 - c^2/2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm

Clave B

MARATÓN MATEMÁTICA (página 32) Unidad 1

1.



De la gráfica:

Del $\triangle BRD$: $\alpha + \beta + m = 360°$ ...(I)

Del $\triangle FER$: $\gamma + \theta + n = 360°$ ...(II)

Del $\triangle ABC$: $\frac{\alpha}{2} + \phi = x$ ...(III)

De (I) y (II) en el dato ($\alpha + \beta + \theta + \gamma = 540°$):

$\alpha + \beta + m = 360°$
$\gamma + \theta + n = 360°$ (+)

$\alpha + \beta + m + \gamma + \theta + n = 720°$
$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 540°$ (–)

$m + n = 180°$

Del resultado se demuestra que: $\overleftrightarrow{R_1} \parallel \overleftrightarrow{R_2}$

De la gráfica:

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \phi + \phi = 180°$

$\frac{\alpha}{2} + \phi = 90°$ ...(IV)

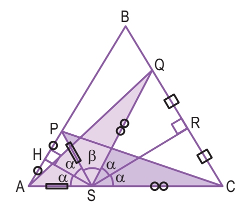
De (III) y (IV):

$\frac{\alpha}{2} + \phi = x = 90°$

$\therefore\ x = 90°$

Clave C

2.



De la gráfica:

Trazamos los segmentos PS y SQ tal que $\overline{HS}$ y $\overline{SR}$ son mediatrices de los triángulos APS y SQC.

$\Rightarrow$ AS = PS; SC = SQ

Del dato AB = BC $\Rightarrow$ $m\angle BAC = m\angle ACB$

$\Rightarrow$ $m\angle ASP = m\angle CSQ = 2\alpha$

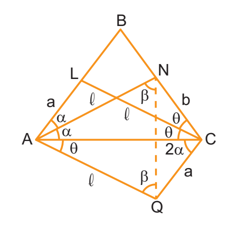
De la gráfica, por congruencia:

$\triangle ASQ \cong \triangle PSC$ (A-L-A)

$\Rightarrow$ AQ = PC = 7

Clave D

3.



Primero asumimos: $2\theta > 2\alpha \Rightarrow \theta > \alpha$ ...(I)

$\Rightarrow a > b$ ...(II)

Trazamos $\overline{AQ} \parallel \overline{LC}$ y $\overline{CQ} \parallel \overline{AL}$.

$\Rightarrow \triangle ALC \cong \triangle AQC$ (A-L-A)

$\Rightarrow AQ = AN = \ell$; $QC = a$ y $m\angle AQC = m\angle ALC$

De (I): $2\theta + \alpha > 2\alpha + \theta$

$\Rightarrow 2\theta + \alpha + m\angle ANC = 2\alpha + \theta + m\angle ALC$

$\Rightarrow$ $m\angle ANC < m\angle ALC$

$m\angle ANC < m\angle AQC$

$\beta + m\angle QNC < \beta + m\angle NQC$

$m\angle QNC < m\angle NQC$

Por el teorema de correspondencia, en el $\triangle NCQ$: $a < b$ ...(III)

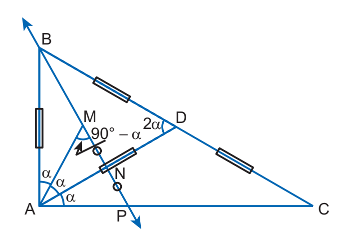
De (I) y (III) vemos que es un absurdo.

$\therefore\ a = b$

Nos piden: $\frac{NC}{AL} = \frac{b}{a} = \frac{b}{b} = 1$

Clave B

4.



Si $\overline{BP}$ es mediatriz de $\overline{AD}$

$\Rightarrow$ AB = BD, $m\angle BAD = m\angle ADB = 2\alpha$ y $m\angle MAN = \alpha$

Si MN = NP:

$\Rightarrow$ $m\angle MAN = m\angle NAP = \alpha$

De la gráfica:

$m\angle DAC + m\angle ACD = m\angle ADB$

$\alpha + m\angle ACD = 2\alpha$

$m\angle ACD = \alpha$

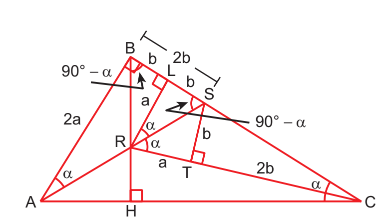
$\Rightarrow$ AD = DC

$\therefore$ El $\triangle ABD$ es equilátero:

$2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$

Clave C

5.



Sean: AB = 2a y BS = 2b

$\Rightarrow$ De los ángulos:

$m\angle HBS = m\angle ASB = 90° - \alpha$

$\overline{RL}$ es mediatriz y base media:

$\Rightarrow RL = a$ y $LS = b$

De la gráfica:
Por el teorema de la bisectriz en el ángulo LRT.

$\Rightarrow$ LS = ST = b y RL = RT = a

De los datos:

$RC = BS + \frac{AB}{2} = 2b + a$

$\Rightarrow RC = RT + TC$

$2b + a = a + TC \Rightarrow TC = 2b$

En el triángulo STC (triángulo notable):

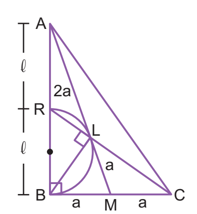
$\Rightarrow m\angle TCS = \frac{53°}{2}$

En el triángulo rectángulo RLC:

$2\alpha + \frac{53°}{2} = 90° \Rightarrow \alpha = \frac{127°}{4}$

Clave D

6.



Por propiedad de una semicircunferencia:
$m\angle BLR = 90°$

Si B y L son puntos de tangencia:

$\Rightarrow BM = ML = a$

En todo triángulo rectángulo si BM = ML:

$\Rightarrow BM = ML = MC = a$

De la gráfica se deduce que L es baricentro

$\Rightarrow AL = 2LM = 2a$

Del ⊾ABM:

$(3a)^2 = (2\ell)^2 + a^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}\,a$ ...(I)

Del ⊾ABC:

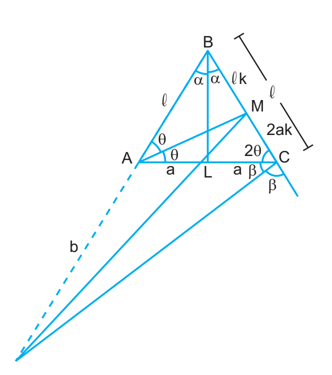
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}\,a$ ...(II)

De (I) y (II):

$\frac{AB}{AC} = \frac{2\ell}{2\sqrt{3}\,a} = \frac{2\sqrt{2}\,a}{2\sqrt{3}\,a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Clave E

7.



Del triángulo ABC, por el teorema de la bisectriz interior del ángulo A:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC} = \frac{\ell}{2a}$

Del △ABC, por el teorema de la bisectriz exterior del ángulo C:

$\frac{BC}{AC} = \frac{BN}{AN} \Rightarrow \frac{\ell}{2a} = \frac{(\ell + b)}{b}$

En el △ABC, por propiedad:

$(\ell h)\,(a)\,(b) = (2ak)\,(a)(\ell + b)$

$\ell k\,(a)\,(b) = (2ak)\,(a)\frac{\ell b}{2a}$

$1 = 1$

Se cumple que los puntos N, L y M son colineales.

$\therefore$ Nos piden: $m\angle MLN = 180°$

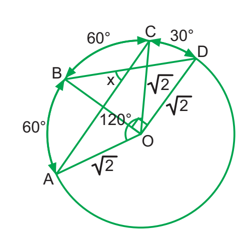
Clave C



Unidad 2

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 35) Unidad 2

1.



$AC = \sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{3})$

$\Rightarrow m\angle AOC = 120°$

$BD = 2 = \sqrt{2}(\sqrt{2})$

$\Rightarrow m\angle BOD = 90°$

Por ángulo interior:

$x = \dfrac{60° + 30°}{2}$

$x = 45°$

Clave B

2. Por teoría: $\ell_n = R\sqrt{2(1 - \cos\theta_n)}$

$R = 4$ y $n = 16$

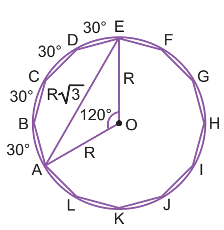
$\theta_{16} = \dfrac{360°}{16} = 22{,}5°$

$\Rightarrow \ell_{16} = 4\sqrt{2\left(1 - \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)}$

$\ell_{16} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Clave A

3.



En el $\triangle AEO$: $AE = R\sqrt{3}$

Por teoría: $\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$3(2 - 3\sqrt{2}) = R^2(2 - \sqrt{3})$

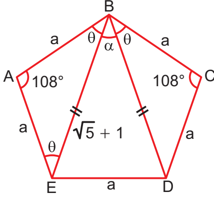
$3 = R^2$

$R = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AE = 3$

Clave E

4.



$108° + 2\theta = 180°$

$2\theta = 72° \Rightarrow \theta = 36°$

$m\angle ABC = 108°$

$2\theta + \alpha = 108°$

$72° + \alpha = 108° \Rightarrow \alpha = 36°$

$36° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 10°$

$a = \ell_{10} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$a = \dfrac{5-1}{2} \Rightarrow a = 2$

$\therefore$ Perímetro $= 5a = 10$

Clave B

5. Piden: x

Sabemos que si R es el circunradio de la circunferencia circunscrita, entonces:

$\ell_{10} = R\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$\ell_6 = R$

$\ell_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Se deduce que: $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + \ell_6^2$

$\therefore x = 90°$

Clave D

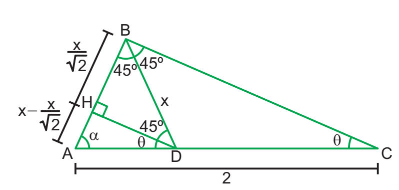
6. El lado del hexágono regular inscrito es igual al radio.

Por lo tanto:

Perímetro $= 6R = 6(3) = 18$

Clave B

7.



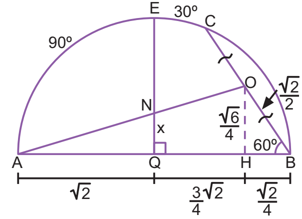
En el $\triangle ABD$: $AD = \ell_8 = x\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\triangle AHD \sim \triangle ABC$

$\dfrac{x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{x\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{x}{2}$ $\quad\therefore x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ m

Clave B

8.



$CB = \ell_6 = \sqrt{2} \Rightarrow OB = OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Se traza $\overline{OH} \perp \overline{QB}$.

En el $\triangle OHB$ (notable de 30° y 60°):

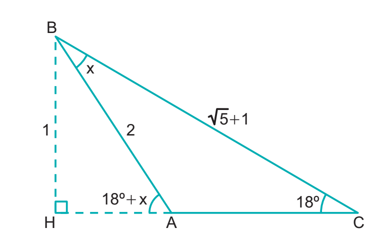
$HB = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ y $OH = (HB)\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\triangle AQN \sim \triangle AHO$:

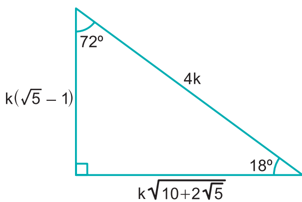
$\dfrac{x}{\dfrac{\sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\sqrt{2}}$ $\quad\therefore x = \dfrac{\sqrt{6}}{7}$

Clave B

9.



Sabemos:



Del gráfico: $\sqrt{5} + 1 = 4k \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

Luego:

$\Rightarrow BH = k(\sqrt{5} - 1) = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)(\sqrt{5} - 1) = 1$

En el $\triangle BHA$:

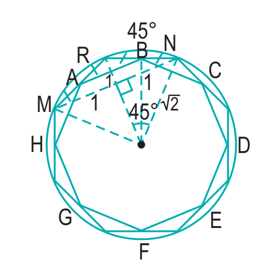
$BH = \dfrac{AB}{2}$

$\Rightarrow 18° + x = 30°$

$\therefore x = 12°$

Clave E

10.

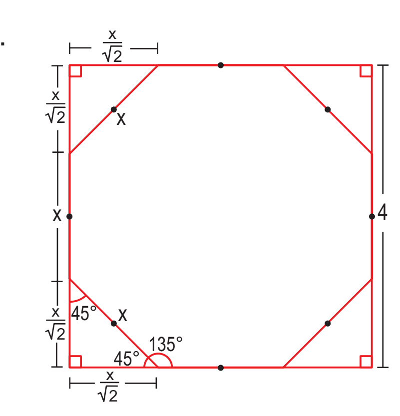


$\overline{AB}$ es base media del $\triangle RMN$.

$\therefore 2p_{ABCDEFGH} = 1(8) = 8$

Clave C

11.

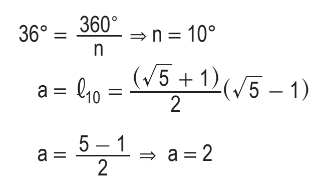


Del gráfico:

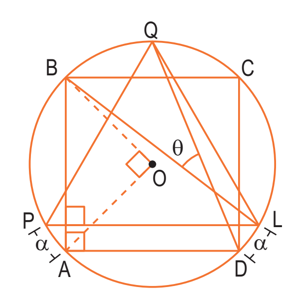
$\dfrac{x}{\sqrt{2}} + x + \dfrac{x}{\sqrt{2}} = 4$

$\therefore x = 4(\sqrt{2} - 1)$

Clave C



12.



Del gráfico, O centro de la circunferencia, además: $\overline{PL} \parallel \overline{AD}$

$m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{DL} = \alpha$

Luego:

$m\overset{\frown}{PL} = m\overset{\frown}{AP} + m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{DL}$

$120° = \alpha + 90° + \alpha$

$30° = 2\alpha$

$\alpha = 15°$

En el ∢BOA:

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{AP} + m\overset{\frown}{PB}$

$90° = 15° + m\overset{\frown}{PB}$

$m\overset{\frown}{PB} = 75°$

En el ∢POQ:

$m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{PB} + m\overset{\frown}{BQ}$

$120° = 75° + m\overset{\frown}{BQ}$

$m\overset{\frown}{BQ} = 45°$

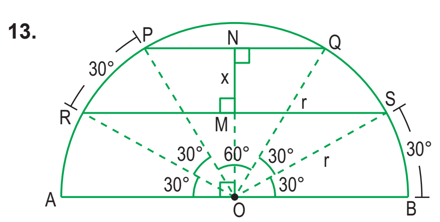
Finalmente: $\theta = \dfrac{m\overset{\frown}{BQ} + m\overset{\frown}{DL}}{2}$

$\theta = \dfrac{45° + 15°}{2}$

$\therefore\ \theta = 30°$

Clave B

13.



Del gráfico:

$\overline{PQ} \parallel \overline{RS} \parallel \overline{AB}$

$m\overset{\frown}{RP} = m\overset{\frown}{QS} = 30°;\ m\overset{\frown}{AR} = m\overset{\frown}{SB} = 30°$

$\Rightarrow\ m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{QB} = 60°;\ m\overset{\frown}{RS} = 120°$

Luego:

$NO = ap_6\ \wedge\ MO = ap_3$

$NO = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}\ \wedge\ MO = \dfrac{r}{2}$

Finalmente:

$x = NO - MO$

$x = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} - \dfrac{r}{2}$

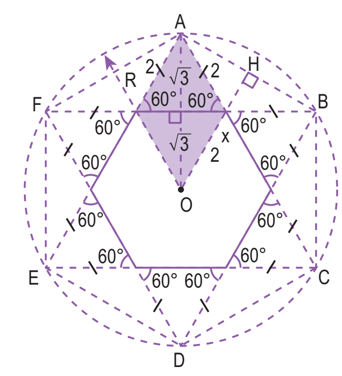
$x = r\dfrac{(\sqrt{3} - 1)}{2}$

$r = \sqrt{3} + 1$

$\therefore\ x = 1$

Clave C

14.



Al prolongar los lados se intersecan en los puntos ABCDEF formándose un hexágono regular, luego:

$x = OH$

$x = ap_6$

$x = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ ...(1)

En la figura sombreada:

$R = OA$

$R = 2\sqrt{3}$

En (1):

$x = (2\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ x = 3$ m

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 37) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

I. $x = 2R(\sqrt{5} + 1)$ ☐

II. $x = R(\sqrt{5} + 1)$ ☐

III. $x = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$ ☑

2.

I. La longitud de su apotema es casi equivalente a la longitud de su circunradio. (V)

II. La longitud de sus lados también aumenta. (F)

III. Su área es casi igual al área de la circunferencia circunscrita a dicho polígono regular. (V)

3.

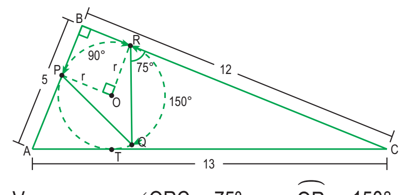
I. $\ell_4^2 + \ell_6^2 = \ell_{10}^2$ ☐

II. $\ell_8^2 + \ell_4^2 = \ell_5^2$ ☐

III. $\ell_6^2 + \ell_4^2 = \ell_5^2$ ☑

Razonamiento y demostración

4.



Vemos que: $m\angle QRC = 75°\ \Rightarrow\ m\overset{\frown}{QR} = 150°$

Además: $m\overset{\frown}{PR} = 90°$

Luego:

$m\overset{\frown}{PQ} + m\overset{\frown}{PR} + m\overset{\frown}{RQ} = 360°$

$\Rightarrow\ m\overset{\frown}{PQ} + 90° + 150° = 360°$

$\therefore\ m\overset{\frown}{PQ} = 120°\ \Rightarrow\ PQ = \ell_3\ \Rightarrow\ PQ = r\sqrt{3}$ ... (I)

En el ⊿ABC:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2\ \Rightarrow\ 13^2 - 12^2 = AB^2$

$\Rightarrow AB = 5$

Aplicamos el teorema de Poncelet:

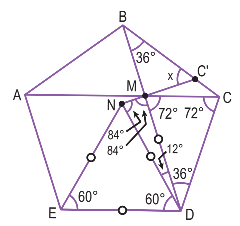
$AB + BC = AC + 2r$

Reemplazando: $5 + 12 = 13 + 2r\ \Rightarrow\ r = 2$

$\therefore\ PQ = 2\sqrt{3}$

Clave A

5.



Sabemos que $ED = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$\therefore$ ΔEND es un triángulo equilátero:

$m\angle MND = 30°$

Luego sabemos que el ΔBCD es isósceles

$m\angle CBD = m\angle BDC = 36°$

$\Rightarrow\ 60° + m\angle NDM + 36° = 108°$

$m\angle NDM = 12°$

Además el ΔNDM es isósceles:

$m\angle MND = m\angle NMD = 84°$

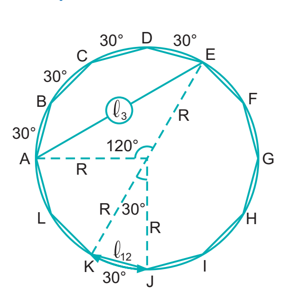
En el BMC':

$x + 36° + 84° = 180°\ \Rightarrow\ x = 60°$

Clave E

Resolución de problemas

6.



Por dato:

$\ell_{12} = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

Sabemos:

$\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$\Rightarrow R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

$R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = (\sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$R = \sqrt{3}$

Luego $\overline{AE}$ subtiende un arco de 120°.

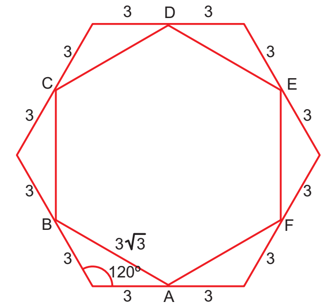
$\Rightarrow AE = \ell_3 = R\sqrt{3}$

$AE = (\sqrt{3})\sqrt{3}$

$\therefore AE = 3$

Clave C

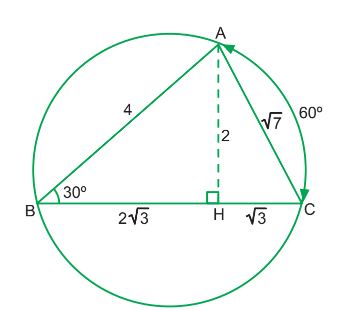
7.



Por propiedad:
$AB = 3\sqrt{3}$
Por lo tanto:
$2p_{\bigcirc ABCDEF} = 6(3\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$

Clave D

8.



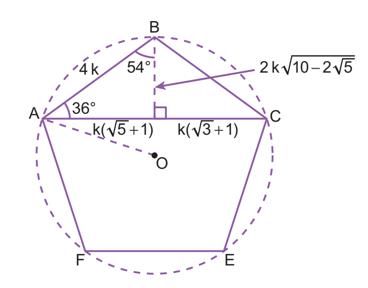
$m\overset{\frown}{AC} = 60°$
$\Rightarrow AC = \ell_6 = R$ ...(1)
Trazamos $\overline{AH} \perp \overline{BC}$
$\Rightarrow BH = 2\sqrt{3} \wedge HC = \sqrt{3}$
En el ⊿BHA (Pitágoras):
$AC = \sqrt{7}$ ...(2)
De (1) y (2):
$\therefore R = \sqrt{7}$

Clave D

9. Por dato:
$\ell_4 = R\sqrt{2} = 4 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$
Piden ℓ_8:
$\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\therefore \ell_8 = 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Clave B

10.



Vemos que el ⊿AHB es notable de 36° y 54°
$\Rightarrow$ del dato: $4k = 2 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$
$\therefore AC = 2k(\sqrt{5}+1) \Rightarrow AC = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)(\sqrt{5}+1)$
$= \sqrt{5}+1$

Clave A

Nivel 2 (página 37) Unidad 2

Comunicación Matemática

11.

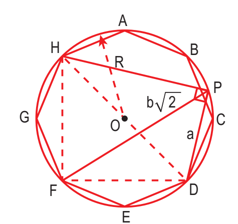
Clave C

12. Primero con centro en A y radio R determinamos los puntos 1 y 2; de igual manera determinamos los puntos 3 y 4, pero con centro en B.

Segundo con un radio $\dfrac{3R}{2}$ y con centro en A y luego en 1 determinamos el punto medio del arco $\overset{\frown}{A1}$; que será llamado 5, luego al prolongar $\overrightarrow{5O}$ hallaremos el punto 6; repitiendo este procedimiento en los arcos $\overset{\frown}{A2}$ y $\overset{\frown}{23}$, hallaremos los puntos 7; 8 y 9; 10 respectivamente. Si unimos todos los puntos obtendremos un dodecágono regular.

Razonamiento y demostración

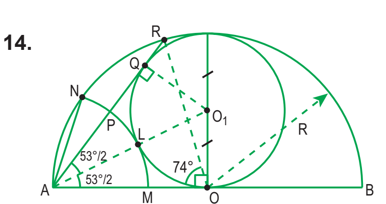
13.



Trazamos $\overline{HP}$, $\overline{HF}$, $\overline{FD}$ y $\overline{HD}$ tal que:
$HF = FD = R\sqrt{2}$; $HD = 2R$
En el ⏢HPDF (T. Ptolomeo):
$(HP)(FD) + (HF)(PD) = (FP)(HD)$
$(HP)(R\sqrt{2}) + (R\sqrt{2})(a) = (b\sqrt{2})(2R)$
$\therefore HP = 2b - a$

Clave B

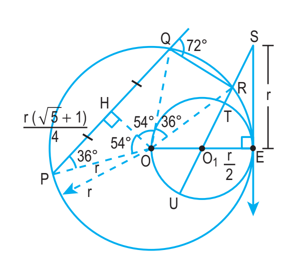
14.



Trazamos AO_1, donde A; L y O_1, son colineales.
El ΔAOO_1, (notable de $\dfrac{53°}{2}$):
$AO = R$, $O_1O = \dfrac{R}{2}$, $AO_1 = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$
Luego: $AN = AL$
$AN = AO_1 - LO_1$
$AN = \dfrac{R\sqrt{5}}{2} - \dfrac{R}{2}$
$AN = R\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$
$AN = \ell_{10} \Rightarrow m\overset{\frown}{AN} = 36°$
$\Delta AQO_1 \cong \Delta AOO_1$ (notables $\dfrac{53°}{2}$ y $\dfrac{127°}{2}$)
Trazamos OR:
$m\angle AOR = 74°$
$m\overset{\frown}{AR} = 74°$
Finalmente:
$m\overset{\frown}{AN} + m\overset{\frown}{NR} = m\overset{\frown}{AR}$
$36° + m\overset{\frown}{NR} = 74°$
$\therefore m\overset{\frown}{NR} = 38°$

Clave D

15.



Trazamos $\overline{DE} \perp \overline{SE}$
ΔO_1ES notable $\dfrac{53°}{2}$ y $\dfrac{127°}{2}$:
$O_1S = r\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
Luego:
$PQ = US$; $QR = TS$
$PQ = \dfrac{r}{2} + \dfrac{r\sqrt{5}}{2}$; $QR = \dfrac{r\sqrt{5}}{2} - \dfrac{r}{2}$

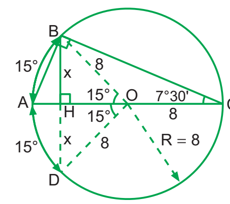
En el ΔQOR:
$QR = r\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

$QR = \ell_{10} \Rightarrow m\overset{\frown}{QR} = 36°$
En el ΔPQO trazamos $\overline{OH}$:
$PH = HQ = r\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{4} \Rightarrow PH = ap_{10}$
$\Rightarrow m\angle HPO = 36°$
$\therefore m\overset{\frown}{PQ} = 108°$
$\Rightarrow m\angle PQR = \dfrac{360° - m\overset{\frown}{PQR}}{2}$
$m\angle PQR = \dfrac{360° - (108° + 36°)}{2}$
$\Rightarrow m\angle PQR = 108°$

Clave B

Resolución de problemas

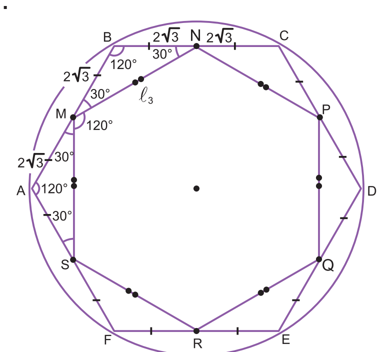
16.



Por dato: $AC = 16$
$\Rightarrow R = 8$
Del gráfico, (2x) subtiende un arco de 30°.
$\Rightarrow 2x = \ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$2x = 8\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$\therefore x = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Clave C

17.



Por dato: el perímetro del hexágono regular ABCDEF es $24\sqrt{3}$, entonces cada lado medirá $4\sqrt{3}$.

Del gráfico: el hexágono MNPQRS resulta regular.

Para el ΔMBN isósceles: $MN = \ell_3$

$R = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow MN = R\sqrt{3} = (2\sqrt{3})\sqrt{3} = 6$

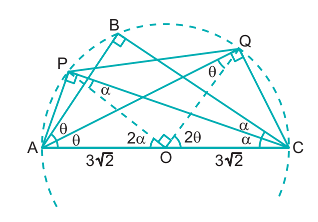
Piden: perímetro del hexágono regular MNPQRS (2p)

$\Rightarrow 2p = 6(MN) = 6(6) = 36$

$\therefore 2p = 36$ m

Clave B

18.



$m\angle APC = m\angle AQC = 90°$

$\Rightarrow$ ⌂APQC es inscriptible

$m\overset{\frown}{AC} = 180°$

$\Rightarrow \overline{AC}$ es diámetro (O: centro)

En el ⊿ABC:

$2\theta + 2\alpha = 90°$

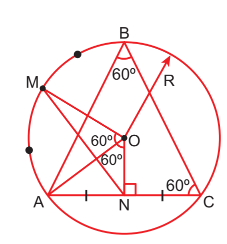
$\Rightarrow m\angle POQ = 90°$

Por lo tanto, en el ⊿POQ:

$PQ = (3\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 6$

Clave A

19.



$OM = R;\ ON = ap_3 = \dfrac{R}{2}$

En el ΔMON:

$$(MN)^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} - 2R\left(\frac{R}{2}\right)\cos 120°$$

$$MN = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore MN = \frac{(2\sqrt{7})\sqrt{7}}{2} = 7$$

Clave B

Nivel 3 (página 38) Unidad 2

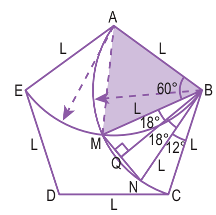
Comunicación matemática

20.

21. Primero con centro en A y radio R determinamos el punto 1. Luego desde el punto 1 trazamos una perpendicular a $\overline{AA'}$ determinando así el punto H, luego con centro en 1 y radio 1H determinamos los puntos 2 y 2', nuevamente con centros en 2 y 2' y radio 1H determinamos los puntos 3 y 3'; repetimos una vez más hallando los puntos 4 y 4'; finalmente unimos los puntos para dibujar el heptágono regular.

Razonamiento y demostración

22.



Del gráfico el ΔAMB es equilátero:

$m\angle ABM = 60°;\ m\angle NBC = 12°$

$\Rightarrow m\angle MBN = m\angle ABC - m\angle ABM - m\angle NBC$

$m\angle MBN = 108° - 60° - 12°$

$m\angle MBN = 36°$

Luego:

$BQ = ap_{10}$

$$BQ = L\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad ...(1)$$

Además:

$L = \ell_5$

$$L = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

$L = 3\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

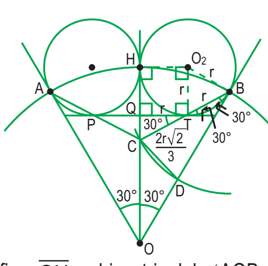
Reemplazando en (1):

$$BQ = (3\sqrt{10-2\sqrt{5}})\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$\therefore BQ = 3\sqrt{5}$

Clave E

23.



Del gráfico: $\overline{OH}$ es bisectriz del ∠AOB

O; C; Q; H colineales

ΔTO_2B equilátero

TB = r

ΔTQC notable 30° y 60°

$$CT = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Luego, $m\angle CBD = 30°$

$CD = \ell_{12}$

$CD = BC\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$CD = \left(2\frac{r\sqrt{3}}{3} + r\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Dato: $r = 2\sqrt{3}$ u

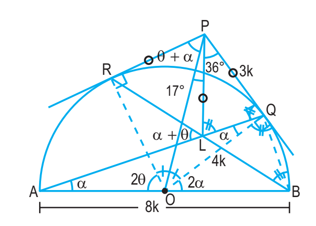
$CD = (4+2\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$CD = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\therefore CD = (\sqrt{6}+\sqrt{2})$u

Clave E

24.



Del gráfico:

$3(AB) = 8(PQ)$; $AB = 8k$; $PQ = 3k$; $OQ = 4k$

ΔPQO ≅ ΔPRO (notables de 37° y 53°)

$OP = 5k \Rightarrow 5 = 5k \Rightarrow k = 1$

$m\angle LPQ = m\angle OPQ - m\angle OPL$

$m\angle LPQ = 53° - 17° \Rightarrow m\angle LPQ = 36°$

En el ⌂PRLQ (por propiedad):

$m\angle RPQ = 2(m\angle RLA)$

R, L y Q pertenecen a la circunferencia de centro P

ΔLPQ isósceles

$\Rightarrow$ ΔLPQ ~ ΔQOB

$2\alpha = 36°$

$\alpha = 18°$

En el ΔAQB:

$AQ = ap_{10}$

$$AQ = (AB)\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

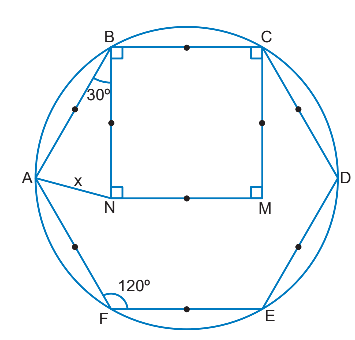
$$AQ = \frac{8k\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$\therefore AQ = 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Clave C

Resolución de problemas

25.



En el ΔABN:

$x = \ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

AB = BN = R

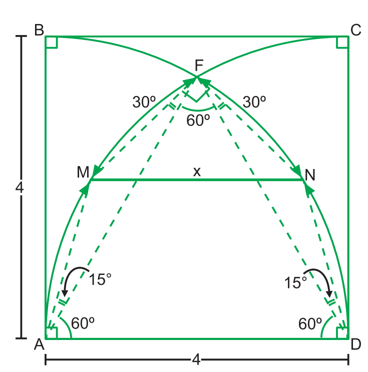
Por dato:

$R = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\therefore x = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,(\sqrt{2-\sqrt{3}}) = 1$ m

Clave E

26.



Trazamos $\overline{AF}$ y $\overline{FD}$ formándose el ΔAFD equilátero.

$\Rightarrow m\angle FAD = m\angle ADF = m\angle AFD = 60°$

Por dato: $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MF} = 30°$

$\Rightarrow AM = MF = \ell_{12}$

$\Rightarrow \ell_{12} = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Por ángulo inscrito:

$m\angle MAF = 15° \Rightarrow m\angle MFA = 15°$

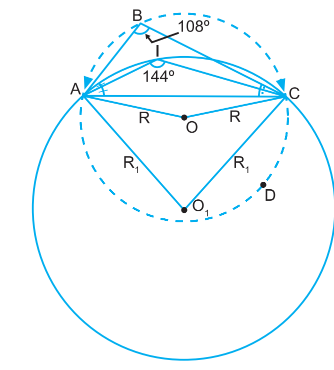
De la misma manera: $m\angle DFN = 15°$

En el ⊿MFN isósceles:

$x = \ell_{12}\sqrt{2} = (4\sqrt{2-\sqrt{3}})\sqrt{2} = 4\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Clave B

27.



En la circunferencia menor:

$m\overset{\frown}{ADC} = 2(108°) = 216°$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{ABC} = 360° - 216° = 144°$

$m\angle AOC = 144°$ (ángulo central)

$\Rightarrow AC = d_5$ (diagonal de un pentágono regular)

En la circunferencia mayor:

$m\overset{\frown}{AIC} = 72° \Rightarrow m\angle AO_1C = 72°$

$AC = \ell'_5$ (lado de un pentágono regular)

$d_5 = \ell_5\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \wedge \ell_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\Rightarrow d_5 = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$

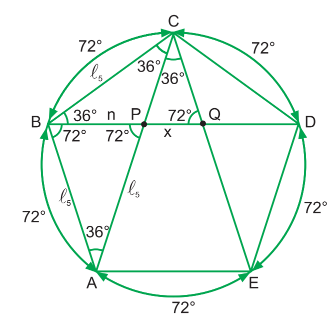
Además: $\ell'_5 = \dfrac{R_1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

También: $AC = d_5 = \ell'_5$

$\Rightarrow R_1 = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$

Clave D

28.



Por dato: $\ell_5 = 3 + \sqrt{5}$

Para el ΔBAP isósceles: n sería el lado de un decágono regular de radio ℓ_5.

$\Rightarrow n = \dfrac{\ell_5}{2}(\sqrt{5}-1) = \dfrac{(3+\sqrt{5})}{2}(\sqrt{5}-1)$

$n = \sqrt{5} + 1$

Del ΔCBQ isósceles: $BC = BQ$

$\Rightarrow \ell_5 = n + x$

$3 + \sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1) + x$

$\therefore x = 2$

Clave D

29. Según el enunciado:

$\dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{1}{3}\left[\ell n - \dfrac{180°(n-2)}{90°}\right]$

$\dfrac{n^2-3n}{2} = \dfrac{1}{3}(\ell n - 2n + 4)$

Reduciendo:

$(3n - 8)(n + 1) = \ell(2n)$

$\Rightarrow 3n - 8 = 2n \wedge n + 1 = \ell$

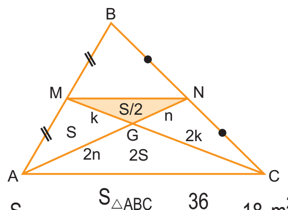
$\therefore n = 8 \wedge \ell = 9$

Luego, el perímetro es: $8 \times 9 = 72$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 40) Unidad 2

1.



$S_{\triangle AMC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{2} = \frac{36}{2} = 18\ m^2$

En el $\triangle AMC$:

$\Rightarrow 3S = 18$

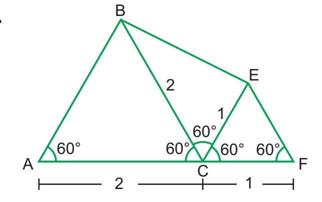
$S = 6$

En el $\triangle NMA$:

$\therefore S_{\triangle MNG} = \frac{S}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m^2$

Clave C

2.



$S_{ABEF} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCE} + S_{\triangle CEF}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ m^2$

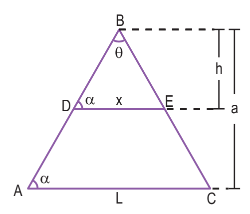
$S_{\triangle BCE} = \frac{2(1)}{2}\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m^2$

$S_{\triangle CEF} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ m^2$

$\therefore S_{ABEF} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{4}\sqrt{3}\ m^2$

Clave D

3.



Por dato: $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

Del gráfico: $\triangle ABC \sim \triangle DBE$

$\Rightarrow \frac{a}{L} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \frac{ax}{L}$ ...(1)

Además:

$A_{\triangle DBE} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2}$ (dato)

$2\left(\frac{xh}{2}\right) = \frac{La}{2}$

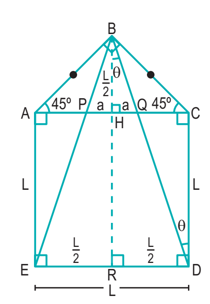
$\Rightarrow x = \frac{aL}{2h}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$x = \frac{aL}{2\left(\frac{ax}{L}\right)} \Rightarrow x = \frac{L\sqrt{2}}{2}$

Clave B

4.



En el ⊿ABC, $\overline{BH}$ es mediatriz, entonces:

$AH = HC = BH = \frac{L}{2}$

En el $\triangle EBD$, $\overline{BR}$ es mediatriz de $\overline{ED}$.

Como: $\overline{PQ} \parallel \overline{ED} \Rightarrow PH = HQ = a$

Luego: ⊿BHQ ~ ⊿DCQ $\Rightarrow QC = 2HQ$

$\Rightarrow QC = 2a$

Entonces:

$HC = 3a = \frac{L}{2} \Rightarrow a = \frac{L}{6}$

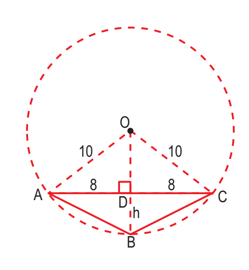
Piden:

$A_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}(2a)\frac{L}{2} = \frac{aL}{2}$

$\therefore A_{\triangle PBQ} = \frac{L}{6}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^2}{12}$

Clave C

5.



Por dato: el circunradio mide 10 cm.

$\Rightarrow OA = OC = OB = 10$

En el ⊿ADO por el teorema de Pitágoras:

$10^2 = 8^2 + (OD)^2$

$\Rightarrow OD = 6$

Luego:

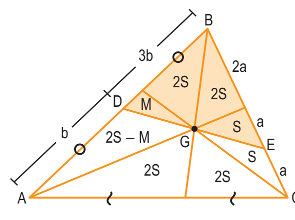
$6 + h = 10 \Rightarrow h = 4$

Por lo tanto:

$A_{\triangle ACB} = \frac{16(4)}{2} = 32\ cm^2$

Clave D

6.



Por propiedad:

$\frac{M + 2S}{2S - M} = \frac{3b}{b} = \frac{3}{1}$

$M + 2S = 6S - 3M$

$4M = 4S$

$\Rightarrow M = S$

Luego:

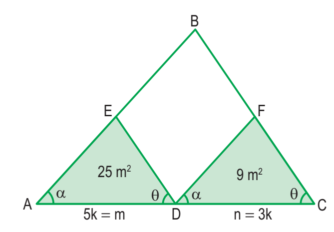
$A_{\square ADEC} = 7S - M = 7S - (S) = 6S$

$A_{\triangle DBE} = 5S + M = 5S + (S) = 6S$

$\therefore \frac{A_{\square ADEC}}{A_{\triangle DBE}} = \frac{6S}{6S} = 1$

Clave C

7.



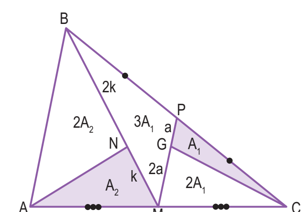
Del gráfico: $\triangle AED \sim \triangle DFC$

$\Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m = 5k \wedge n = 3k$

$\Rightarrow \frac{A_{\triangle ABC}}{25} = \frac{(8k)^2}{(5k)^2} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 64\ m^2$

Clave D

8.



Por dato: G y N son baricentros de los triángulos BMC y ABC, respectivamente.

Además: $A_1 = 10\ m^2$

Del gráfico:

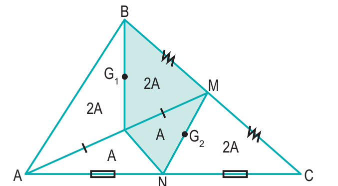
$3A_2 = 6A_1$

$A_2 = 2A_1 = 2(10)$

$\therefore A_2 = 20\ m^2$

Clave C

9.



Por dato: G_1 y G_2 son los baricentros de los triángulos ABM y AMC, respectivamente.

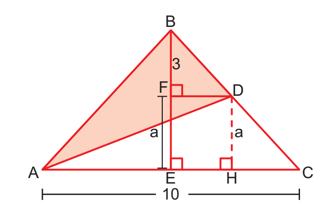
Además: $A_{\triangle ABC} = 80\ m^2$

$8A = 80 \Rightarrow A = 10$

$\therefore A_{somb.} = 3A = 3(10) = 30\ m^2$

Clave B

10.



Trazamos: $\overline{DH} \perp \overline{AC}$.

$\Rightarrow DH = FE = a$



Del gráfico:

$A_{\triangle ABD} = A_{\triangle ABC} - A_{\triangle ADC}$

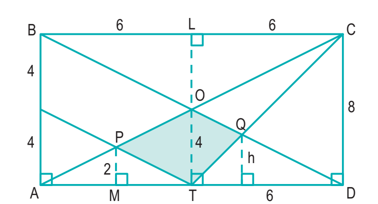
$A_{\triangle ABD} = \dfrac{10(3+a)}{2} - \dfrac{10(a)}{2}$

$\therefore A_{\triangle ABD} = 15\ cm^2$

Clave B



11.



Por propiedad de semejanza:

$h = \dfrac{8(4)}{8+4} = \dfrac{8}{3}$

Por el teorema de los puntos medios:

$OT = 4 \wedge PM = 2$

Del gráfico:

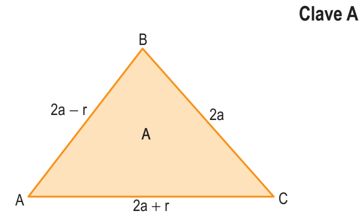
$A_{\square POQT} = A_{\triangle AOD} - A_{\triangle APT} - A_{\triangle TQD}$

$A_{\square POQT} = \dfrac{12(4)}{2} - \dfrac{6(2)}{2} - \dfrac{6\left(\frac{8}{3}\right)}{2}$

$\therefore A_{\square POQT} = 10\ m^2$

Clave A

12.



Por dato:

$A_{\triangle ABC} = 2p$

Aplicamos la fórmula de Herón:

$p = \dfrac{(2a-r) + 2a + (2a+r)}{2}$

$p = 3a \Rightarrow 2p = 6a$

$\sqrt{3a(3a-2a+r)(3a-2a)(3a-2a-r)} = 6a$

$\sqrt{3a^2(a+r)(a-r)} = 6a$

$\Rightarrow (a+r)(a-r) = 12 \quad ...(1)$

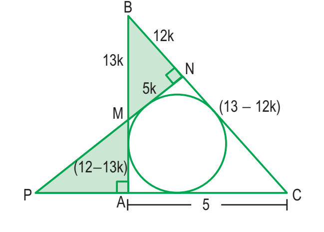
Luego, los valores enteros que satisfacen (1) son: $a = 4 \wedge r = 2$

$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = 2p = 6a = 6(4) = 24$

$\therefore A_{\triangle ABC} = 24$

Clave D

13.



En el cuadrilátero circunscrito AMNC por el Teorema de Pitot:

$(12 - 13k) + (13 - 12k) = 5k + 5 \Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

Luego:

$A_{\triangle MNB} = \dfrac{5k(12k)}{2} = 30\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{40}{3}\ m^2 \quad ...(1)$

Además: $\triangle PAM \sim \triangle BNM$:

$\Rightarrow \dfrac{AP}{12k} = \dfrac{12-13k}{5k}$

$AP = \dfrac{144 - 156k}{5}$

Pero: $k = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AP = 8$ y $AM = \dfrac{10}{3}$

Luego:

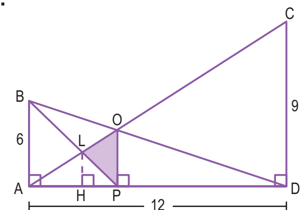
$A_{\triangle PAM} = \dfrac{(8)}{2}\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{40}{3}\ m^2 \quad ...(2)$

De (1) y (2):

$\therefore A_{\triangle MNB} + A_{\triangle PAM} = \dfrac{40}{3} + \dfrac{40}{3} = 26,\hat{6}\ m^2$

Clave C

14.



Por propiedad de semejanza:

$OP = \dfrac{6(9)}{6+9} \Rightarrow OP = \dfrac{18}{5}$

$LH = \dfrac{\frac{18}{5}(6)}{\frac{18}{5}+6} \Rightarrow LH = \dfrac{9}{4}$

Luego: $\triangle APO \sim \triangle ADC$

$\Rightarrow \dfrac{12}{9} = \dfrac{AP}{\left(\frac{18}{5}\right)} \Rightarrow AP = \dfrac{24}{5}$

Del gráfico:

$A_{\triangle OPL} = A_{\triangle APO} - A_{\triangle ALP}$

$A_{\triangle OPL} = \dfrac{\frac{18}{5}\left(\frac{24}{5}\right)}{2} - \dfrac{\frac{9}{4}\left(\frac{24}{5}\right)}{2}$

$\therefore A_{\triangle OPL} = \dfrac{81}{25}\ cm^2$

Clave B

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 42) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

$A_{\triangle ABC} = \sqrt{r \cdot 11 \cdot 13 \cdot 16}$

$4\sqrt{715} = 4\sqrt{r \cdot 11 \cdot 13}$

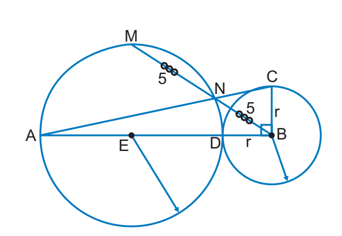
$\sqrt{5 \cdot 11 \cdot 13} = \sqrt{r \cdot 11 \cdot 13}$

$r = 5$

2.

Razonamiento y demostración

3.



Piden: $A_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}(AB)r \quad ...(1)$

Por el teorema de las secantes:

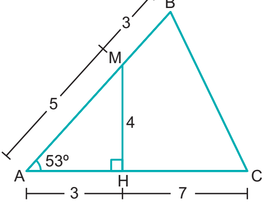
$AB(r) = 10(5) \Rightarrow (AB)r = 50$

Reemplazando en (1):

$\therefore A_{\triangle ABC} = \dfrac{50}{2} = 25$

Clave A

4.



En el $\triangle AHM$ por el teorema de Pitágoras:

$AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow m\angle MAH = 53°$

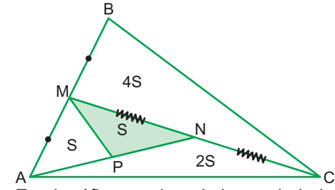
Por la fórmula trigonométrica:

$A_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} \operatorname{sen} 53° = \dfrac{(8)(10)}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)$

$\therefore A_{\triangle ABC} = 32$

Clave C

5.



En el gráfico empleando la propiedad:

$S_1 \quad S_2 \qquad \Rightarrow S_1 = S_2$

Por dato: $S_{\triangle ABC} = 48$

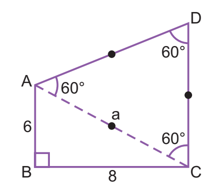
$8S = 48 \Rightarrow S = 6$

Piden: $S_{\triangle MNP} = S$

$\therefore S_{\triangle MNP} = 6$

Clave A

6.



$a^2 = 6^2 + 8^2$

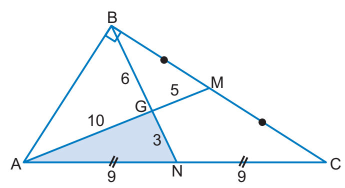
$a = 10$

$\therefore S_{\triangle ADC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

Clave B

Resolución de problemas

7.



G: baricentro del $\triangle$ABC.

GN = 3 ⇒ BG = 6

GM = 5 ⇒ AG = 10

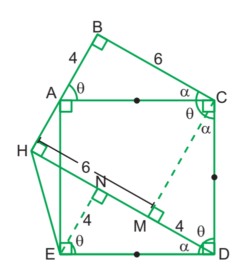
BN = AN = NC = 9

En el ΔAGN por la fórmula de Herón:

$A_{\Delta AGN} = \sqrt{11(1)(8)2} = 4\sqrt{11}\ m^2$

Clave A

8.



En el $\triangle$ABC: $\theta + \alpha = 90°$

Trazamos: $\overline{CM} \perp \overline{HD}$ y $\overline{EN} \perp \overline{HD}$

Luego: $\triangle$ABC ≅ $\triangle$DMC ≅ $\triangle$END (Caso ALA)

⇒ MD = EN = 4

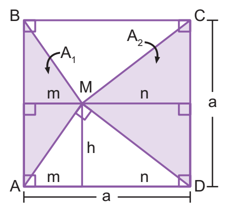
Piden:

$A_{\Delta DEH} = \frac{1}{2}(HD)(EN) = \frac{1}{2}(10)(4)$

$\therefore A_{\Delta DEH} = 20$

Clave C

9.



Piden:

$A_{\triangle AMD} = \frac{1}{2}ah$ ...(1)

Del gráfico:

$A_1 = \frac{1}{2}am;\ A_2 = \frac{1}{2}an \Rightarrow A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{4}a^2mn$

Dato:

$A_1 \cdot A_2 = 48 \Rightarrow a^2mn = 192$

En el $\triangle$AMD por relaciones métricas:

$mn = h^2 \Rightarrow a^2(h^2) = 192$

$\Rightarrow\ ah = 8\sqrt{3}$

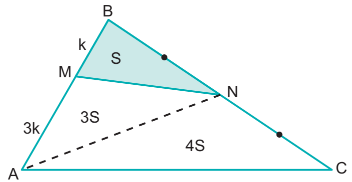
Reemplazando en (1):

$A_{\Delta AMD} = \frac{(8\sqrt{3})}{2} = 4\sqrt{3}$

$\therefore A_{\Delta AMD} = 4\sqrt{3}\ cm^2$

Clave E

10.



Piden: $S_{\Delta MBN} = S$

Para la ceviana MN:

$S_{\Delta MNA} = 3S_{\Delta MBN} \Rightarrow S_{\Delta MNA} = 3S$

Para la mediana AN:

$S_{\Delta ANB} = S_{\Delta ANC} = 4S$

Por dato: $S_{\Delta ABC} = 64$

$\Rightarrow 8S = 64$

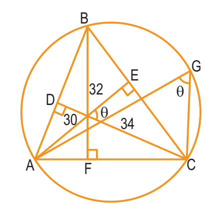
$\therefore\ S = 8$

Clave B

Nivel 2 (página 43) Unidad 2

Comunicación matemática

11. El ⏢ABGC es inscriptible



Sea R el circunradio del ΔABC, entonces:

$R = \frac{(AB)(BC)}{2BF}$

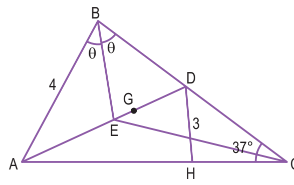
$R = \frac{1088}{2(32)}$

$R = 17$

Luego:

- $A_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{17}{2}(30)(34)(32)} = 136\sqrt{5}$
- $AC = \frac{2A_{\Delta ABC}}{32} = \frac{17}{2}\sqrt{5}$

12.



Como $\overline{AD}$ pasa por el baricentro G, entonces:

BD = DC ... (1)

Al trazar la altura desde D hacia $\overline{AC}$, se forma el $\triangle$HDC notable de 53° y 37°, entonces:

DC = 5

⇒ BD = 5

Como $\overline{BE}$ es bisectriz

$\frac{AE}{ED} = \frac{BA}{BD} = \frac{4K}{5K} = \frac{A_{\Delta ABE}}{A_{\Delta EBD}}$

Además de (1):

$A_{\Delta BED} = A_{\Delta DEC} = 5k$

$A_{\Delta ABE} = A_{\Delta AEC} = 4k$

Luego:

$A_{\Delta ABE}$ [=] $A_{\Delta AEC}$

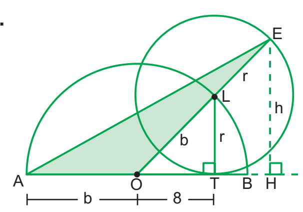
$A_{\Delta EDC}$ [=] $A_{\Delta BED}$

$A_{\Delta BED}$ [>] $A_{\Delta ABE}$

$A_{\Delta AEC}$ [<] $A_{\Delta BED}$

Razonamiento y demostración

13.



Tenemos: $\triangle$OTL ~ $\triangle$OHE:

$\Rightarrow \frac{r}{b} = \frac{h}{b+r} \Rightarrow bh = (b+r)r$

En el $\triangle$OTL por el teorema de Pitágoras:

$b^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow b^2 - r^2 = 8^2$

$\Rightarrow (b+r)(b-r) = 64$ ...(1)

Por dato:

TB + r = 8 ⇒ TB = 8 − r

Del gráfico: TB = b − 8

⇒ 8 − r = b − 8

⇒ 16 = b + r ...(2)

En (1): b − r = 4 ...(3)

Resolviendo (2) y (3): b = 10 ∧ r = 6

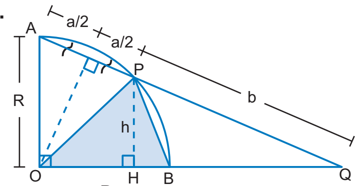
Piden:

$A_{\Delta AOE} = \frac{bh}{2} = \frac{(b+r)r}{2}$

$\therefore A_{\Delta AOE} = \frac{16(6)}{2} = 48\ cm^2$

Clave D

14.



Por dato: ab = 16

Piden:

$A_{\Delta OPB} = \frac{Rh}{2}$ ...(1)

Luego: $\triangle$AOQ ~ $\triangle$PHQ

$\Rightarrow \frac{R}{a+b} = \frac{h}{b}$

$\Rightarrow a + b = \frac{bR}{h}$ ...(2)

En el $\triangle$ AOQ por las relaciones métricas:

$R^2 = (a+b)\frac{a}{2}$ ...(3)

Reemplazando (2) en (3):

$R^2 = \left(\frac{bR}{h}\right)\frac{a}{2}$ & $Rh = \frac{ba}{2}$

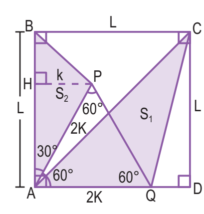
Reemplazando en (1):

$A_{\Delta OPB} = \frac{1}{2}\left(\frac{ba}{2}\right) = \frac{ba}{4} = \frac{16}{4}$

$\therefore A_{\Delta OPB} = 4$

Clave B

15.



Del gráfico:

$$S_2 = \frac{(BA)(PH)}{2} = \frac{(L)(k)}{2} \quad ...(1)$$

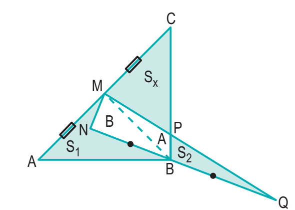
$$S_1 = \frac{(AQ)(CD)}{2} = \frac{(2k)(L)}{2} \quad ...(2)$$

Dividiendo (1) y (2):

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(L)(k)}{(2k)(L)} = \frac{1}{2}$$

Clave B

16.



Por dato:
$S_1 = 5 \wedge S_2 = 2$

Para la mediana MB en el ΔNMQ:
$B = A + S_2 \quad ...(1)$

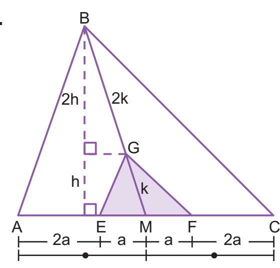
Para la mediana BM en el ΔABC:
$S_x + A = B + S_1 \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):
$S_x + A = A + S_2 + S_1$
$\Rightarrow S_x = S_1 + S_2 = 5 + 2$
$\therefore S_x = 7$

Clave E

Resolución de problemas

17.



G: baricentro del ΔABC

Además: $\overline{EG} \parallel \overline{AB} \wedge \overline{GF} \parallel \overline{BC}$

Por dato: $A_{\Delta ABC} = 72\ m^2$

$$\Rightarrow \frac{6a(3h)}{2} = 72 \Rightarrow ah = 8$$

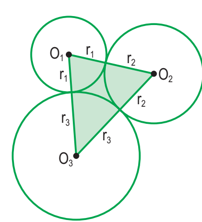
Piden:

$$A_{\Delta EGF} = \frac{2a(h)}{2} = ah = 8$$

$\therefore A_{\Delta EGF} = 8\ m^2$

Clave C

18.

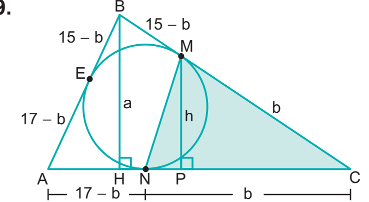


Por dato:
$r_1 + r_2 + r_3 = r_1\ r_2\ r_3 = 6$
Luego, por la fórmula de Herón:

$$A_{\Delta O_1O_2O_3} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3} = \sqrt{6(6)} = 6$$

Clave D

19.



De la figura:
$AB = 32 - 2b = 8 \Rightarrow b = 12$

Luego: $\triangle MPC \sim \triangle BHC$

$$\Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{b}{15} \Rightarrow h = \frac{4}{5}a \quad ...(1)$$

Por el teorema de Herón:

$$a = \frac{2}{17}\sqrt{(20)(3)(5)(12)} = \frac{120}{17}$$

Reemplazando en (1):

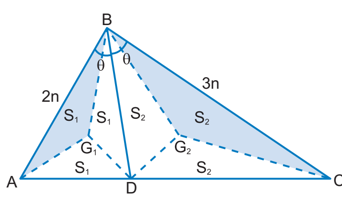
$$h = \frac{96}{17}$$

Luego:

$$A_{\Delta MCN} = \frac{1}{2}(b)(h) = \frac{576}{17}\ cm^2$$

Clave C

20.



Por dato:
G_1: baricentro del ΔABD

$$\Rightarrow S_{\Delta AG_1B} = S_{\Delta AG_1D} = S_{\Delta BG_1D} = S_1$$

G_2: baricentro del ΔBDC

$$\Rightarrow S_{\Delta BG_2D} = S_{\Delta DG_2C} = S_{\Delta BG_2C} = S_2$$

Por el teorema de bisectriz interior:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{2n}{3n} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$$

En el ΔABC, se cumple:

$$\frac{3S_1}{3S_2} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{DC}$$

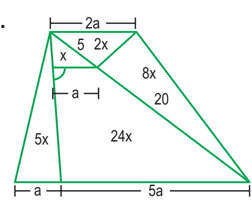
$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$$

Clave D

Nivel 3 (página 44) Unidad 2

Comunicación matemática

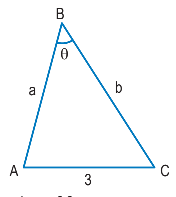
21.



Luego:

- $A = \frac{B}{4}$ (V)
- $D = 12C$ (F)
- $E = \frac{B}{4}$ (F)
- $E = C$ (F)
- $D = 12A$ (V)

22.



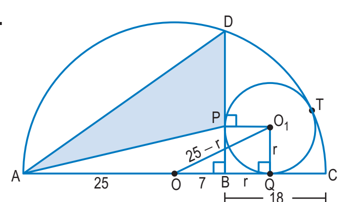
$$\frac{ab\,sen\theta}{2} = \frac{\sqrt{1235}}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(ab\frac{\sqrt{1235}}{126}\right) = \frac{\sqrt{1235}}{4}$$

$ab = 63$
Si $a = 1$ y $b = 63$: $63 < 1 + 3$
(el triángulo no existe)
Si $a = 3$ y $b = 21$: $21 < 3 + 3$
(el triángulo no existe)
Si $a = 9$ y $b = 7$: $9 - 3 < 7 < 9 + 3$; $7 - 3 < 9 < 7 + 3$; $9 - 7 < 3 < 9 + 7$

Razonamiento y demostración

23.



Por propiedad:
$BD^2 = (AB)(BC) = 32(18) \Rightarrow BD = 24$

En el $\triangle OQO_1$ por el teorema de Pitágoras:
$(25 - r)^2 = (r + 7)^2 + r^2 \Rightarrow r = 8$

Como: $PB = O_1Q = r$
$\Rightarrow DP = BD - r = 24 - 8 = 16$

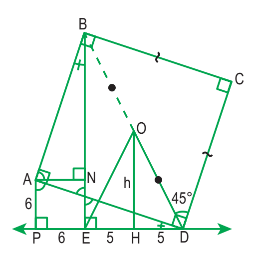
Piden:

$$A_{\Delta DPA} = \frac{DP(AB)}{2} = \frac{16(25+7)}{2}$$

$\therefore A_{\Delta DPA} = 256\ m^2$

Clave A

24.





Piden:

$A_{\triangle EOD} = \frac{1}{2}(10)h = 5h$ ...(1)

Luego: ◺ANB ∼ ◺APD (caso ALA)

⇒ AN = PE = 6 ; BN = PD = 16

Por el teorema de los puntos medios:

BE = 2h = BN + NE

2h = 16 + 6

⇒ h = 11

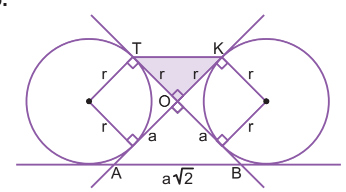
Reemplazando en (1):

$A_{\triangle EOD} = 5(11) = 55$

$\therefore A_{\triangle EOD} = 55\ m^2$

Clave B

25.



Piden:

$A_{\triangle TOK} = \frac{1}{2}r^2$ ...(1)

Por dato: $A_{\triangle AOB} = 6$

$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

Por propiedad:

$A_{\triangle AOB} = (p - a)r$

$p = \frac{(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})(\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

Entonces:

$6 = (2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 2\sqrt{3})r \Rightarrow r = \sqrt{6}$

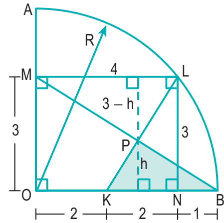
Reemplazando en (1):

$\Rightarrow A_{\triangle TOK} = \frac{(\sqrt{6})^2}{2} = 3$

$\therefore A_{\triangle TOK} = 3\ m^2$

Clave D

26.



Sea R: radio del cuadrante AOB.

⇒ OL = R

En el ◺ONL por el teorema de Pitágoras:

$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Entonces: NB = 1

Luego: ΔMPL ∼ ΔBPK

$\Rightarrow \frac{3 - h}{4} = \frac{h}{3}$

$9 - 3h = 4h \Rightarrow h = \frac{9}{7}$

Piden:

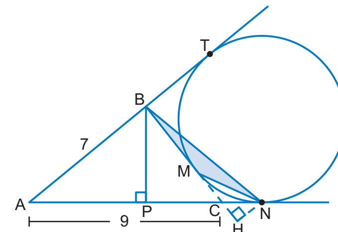
$A_{\triangle KPB} = \frac{1}{2}(KB)(h) = \frac{1}{2}(3)\left(\frac{9}{7}\right)$

$\therefore A_{\triangle KPB} = \frac{27}{14}$

Clave B

Resolución de problemas

27.



BM = 8 – MC; BM = BT; MC = CN

Luego:

AT = AN ⇒ 7 + (8 – MC) = 9 + MC

Entonces:

MC = 3 ⇒ CN = 3; BM = 5

Por el teorema de Herón en el ΔABC:

$BP = \frac{2}{9}\sqrt{(12)(3)(4)(5)} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$

Luego: ◺BPC ∼ ◺NHC:

$\Rightarrow \frac{BP}{NH} = \frac{BC}{CN} \Rightarrow \frac{\left(\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)}{NH} = \frac{8}{3} \Rightarrow NH = \sqrt{5}$

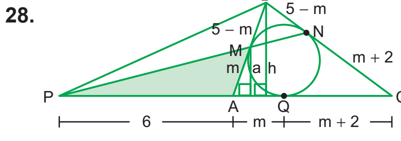
De la figura:

$A_{\triangle BNM} = \frac{1}{2}(BM)(NH) = \frac{5\sqrt{5}}{2}\ m^2$

Clave E

28.





Por dato:

AC = 6 = 2m + 2 ⇒ m = 2

Luego:

$A_{\triangle MPA} = \frac{1}{2}(6)a = 3a$ ...(1)

En el ΔABC por el teorema de Herón:

$h = \frac{2}{6}\sqrt{(9)(3)(2)(4)} = 2\sqrt{6}$

Por semejanza de triángulos:

$\frac{h}{AB} = \frac{a}{AM} \Rightarrow \frac{h}{5} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{5}$

$a = \frac{2}{5}(2\sqrt{6}) = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

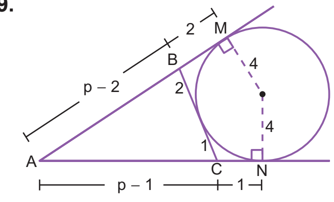
Reemplazando en (1):

$A_{\triangle MPA} = 3\left(\frac{4\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{12\sqrt{6}}{5}$

$A_{\triangle PBC} = \frac{(PC)h}{2} = \frac{12}{2}(2\sqrt{6}) = 12\sqrt{6}$

Clave E

29.



Por propiedad: AM = AN = p

p: semiperímetro del ΔABC.

En el ΔABC por la fórmula de Herón:

$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-3)(1)(2)}$ ...(1)

El área de la región triangular ABC en función del exradio:

$A_{\triangle ABC} = 4(p - 3)$ ...(2)

De (1) y (2):

$4(p - 3) = \sqrt{2p(p-3)}$

$16(p - 3)^2 = 2p(p - 3)$

$8p - 24 = p$

$7p = 24 \Rightarrow p = \frac{24}{7}$

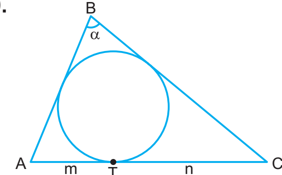
Reemplazando en (2):

$A_{\triangle ABC} = 4\left(\frac{24}{7} - 3\right) = \frac{12}{7}$

$\therefore A_{\triangle ABC} = \frac{12}{7}$

Clave B

30.



Por dato:

$A_{\triangle ABC} = 27 \wedge \sqrt{mn} = 6 \Rightarrow mn = 36$

Por propiedad:

$A_{\triangle ABC} = mn\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$27 = 36\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\frac{3}{4} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

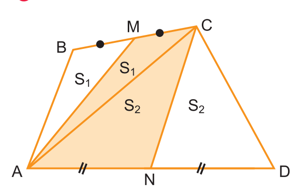
$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 53°$

$\therefore \alpha = 106°$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 45) Unidad 2

1.



$A_{\square ABCD} = 48\ m^2$ (dato)

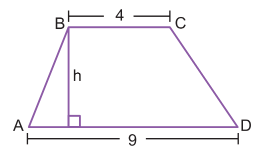
$2S_1 + 2S_2 = 48$

$\Rightarrow S_1 + S_2 = 24$

$\therefore A_{\square AMCN} = S_1 + S_2 = 24\ m^2$

Clave C

2.



Del dato: $h = \sqrt{(4)\cdot 9}$

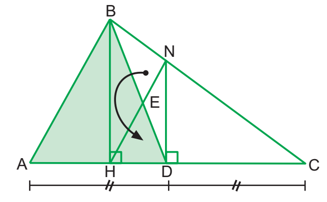
$\Rightarrow h = 6$

$A_{\square ABCD} = \left(\dfrac{9+4}{2}\right)6 = \dfrac{13\cdot 6}{2}$

$\therefore A_{\square ABCD} = 39\ m^2$

Clave D

3.



Trazamos $\overline{DB}$:

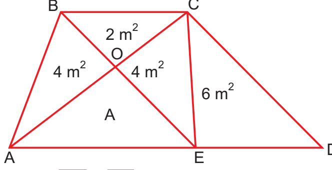
Como $\overline{BH} // \overline{ND} \Rightarrow A_{\triangle BEN} = A_{\triangle EHD}$

Como $AD = DC \Rightarrow A_{\triangle ABD} = A_{\triangle BCD} = \dfrac{A_{\triangle ABC}}{2}$

$\therefore\ A_{\triangle ABD} = A_{\square ABNH} = \dfrac{18}{2} = 9\ m^2$

Clave C

4.



Como $\overline{BC} // \overline{AE} \Rightarrow A_{\triangle AOB} = A_{\triangle COE}$

Como BCDE es un paralelogramo:

$\Rightarrow A_{\triangle BCE} = A_{\triangle CED}$

$A_{\triangle BOC} + \underbrace{A_{\triangle COE}}_{4} = 6 \Rightarrow A_{\triangle BOC} = 2\ m^2$

Además:

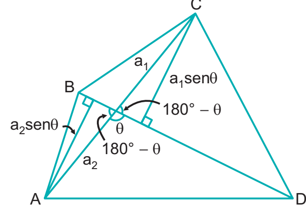
$4\ .\ 4 = 2\ .\ A \Rightarrow A = 8\ m^2$

$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 4 + 2 + 4 + 8 + 6$

$\therefore A_{\square ABCD} = 24\ m^2$

Clave A

5.



Datos: $a_1 + a_2 = 6$

$BD = 8$

$A_{\square ABCD} = A_{\triangle BCD} + A_{\triangle BAD}$

$A_{\square ABCD} = \dfrac{BD\cdot a_1 \text{sen}\theta}{2} + \dfrac{BD\cdot a_2 \text{sen}\theta}{2}$

$A_{\square ABCD} = \dfrac{BD(a_1 + a_2)\text{sen}\theta}{2}$

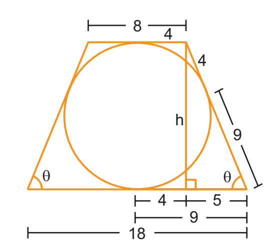
$A_{\square ABCD} = \dfrac{BD\cdot AC\text{sen}\theta}{2}$

$\Rightarrow A_{\square ABCD} = \dfrac{8(6)}{2}\ \underbrace{\text{sen}\theta}_{1\ (\text{sen}\theta\ \text{máximo})}$

$\therefore A_{\square ABCD} = 24\ m^2$

Clave D

6.



$h^2 + 5^2 = 13^2$

$h^2 + 25 = 169 \Rightarrow h^2 = 144$

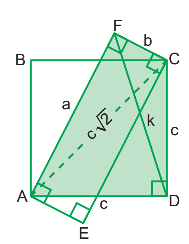
$\Rightarrow h = 12$

$A_{\square} = \left(\dfrac{18+8}{2}\right).\ 12 = 13\ .\ 12$

$\therefore A_{\square} = 156\ m^2$

Clave D

7.



Nos piden:

$A_{\square ABCD} + A_{\square AFCE} = c^2 + ab$

Del $\triangle AFC$, por el Teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = (c\sqrt{2})^2$

Del $\square AFCD$, por el Teorema de Ptolomeo:

$k\ .\ c\sqrt{2} = a\ .\ c + bc \Rightarrow k\sqrt{2} = a + b$

Elevando al cuadrado:

$(k\sqrt{2})^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{} + 2\ ab$

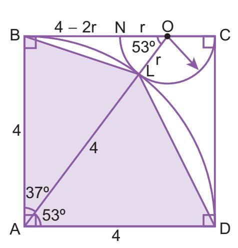
$2k^2 = 2c^2 + 2ab$

$k^2 = c^2 + ab$

$\therefore\ A_{\square ABCD} + A_{\square AFCE} = c^2 + b^2 = k^2$

Clave A

8.



En el $\triangle ABO$ por el teorema de Pitágoras:

$(4 - r)^2 + 4^2 = (4 + r)^2 \Rightarrow r = 1$

Luego, el $\triangle ABO$ resulta ser notable de 37° y 53°.

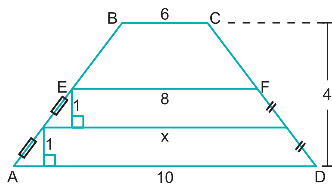
$A_{\square ABLD} = A_{\triangle ABL} + A_{\triangle ALD}$

$A_{\square ABLD} = \dfrac{16}{2}\text{sen}37° + \dfrac{16}{2}\text{sen}53°$

$\therefore A_{\square ABLD} = \dfrac{56}{5} = 11{,}2\ cm^2$

Clave C

9.



En el trapecio ABCD:

$\left(\dfrac{BC + 10}{2}\right)4 = 32 \Rightarrow BC = 6$

Trazamos $\overline{EF}$, mediana del trapecio ABCD.

$\Rightarrow EF = \left(\dfrac{6 + 10}{2}\right) = 8$

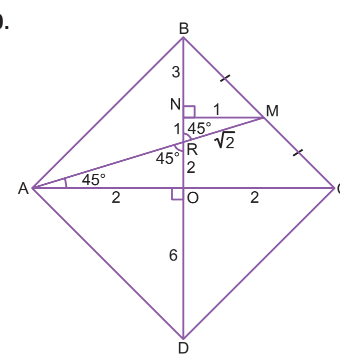
Luego, x: mediana del trapecio AEFD.

$\Rightarrow x = \dfrac{8 + 10}{2} = 9$

$\therefore x = 9\ m$

Clave A

10.



Trazamos: $\overline{MN} \perp \overline{BD}$

Del $\triangle MNR$ es notable de 45°:

$MN = 1 \Rightarrow OC = 2,\ AO = 2,\ OP = 2$

Luego: $NO = 3 \Rightarrow NB = 3$

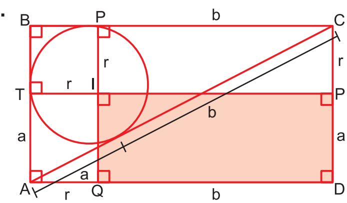
$A_{\lozenge ABCD} = \dfrac{(BD)(AC)}{2} = \dfrac{(12)(4)}{2}$

$\therefore A_{\lozenge ABCD} = 24\ m^2$

Clave A



11.



Por dato:

$A_{\square ABCD} = k = (r + b)(r + a)$

Luego:

Del ⊿ADC por el teorema de Pitágoras:

$(a + b)^2 = (b + r)^2 + (a + r)^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = b^2 + 2br + r^2 + a^2 + 2ar + r^2$

$2ab = 2r(a + b) + 2r^2$

$\Rightarrow ab = r(a + b) + r^2$

Piden: $A_{\square QIPD} = ab$

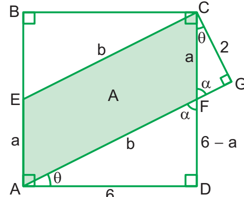
Del dato: $\underbrace{r^2 + (a + b)r}_{ab} + ab = k$

$2ab = k$

$\therefore ab = \frac{k}{2}$

Clave A

12.



Del gráfico: ⊿ADF ~ ⊿CGF

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$

$\Rightarrow b = 3k;\ a = k$

Del ⊿ADF (por Pitágoras):

$b^2 = (6 - a)^2 + 6^2$

$(3k)^2 = (6 - k)^2 + 36$

Luego:

$8k^2 + 12k - 72 = 0$

$2k^2 + 3k - 18 = 0$

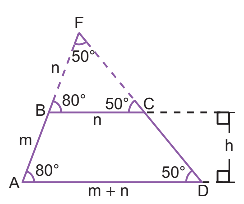
$\Rightarrow k = \frac{-3 + \sqrt{153}}{4}$

Piden: $A_{\square AECF} = 2b = 6k$

$\therefore A_{\square AECF} = 3\left(\frac{-3 + \sqrt{153}}{2}\right)\ m^2$

Clave B

13.



Por dato: ABCD es un trapecio.

Piden:

$A_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)\ h$ ...(1)

Prolongamos: $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$

Entonces: ΔFBC es isósceles.

$\Rightarrow BF = BC = n$

También: ΔFAD es isósceles.

$\Rightarrow AF = AD = m + n$

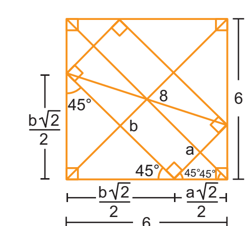
Reemplazando en (1):

$A_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(n + m + n)\ h$

$\therefore A_{\square ABCD} = \left(\frac{m + 2n}{2}\right)h$

Clave C

14.



Del gráfico:

$(a + b)\frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

$\Rightarrow a + b = 6\sqrt{2}$ ...(1)

$a^2 + b^2 = 8^2$ ...(2)

Elevando (1) al cuadrado:

$a^2 + 2ab + b^2 = 72$

$(64) + 2ab = 72 \Rightarrow ab = 4$

$\therefore A_{\square} = ab = 4\ m^2$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2. Del enunciado:

$A_{\square ABCD} = pr$ y $A_{\square EFGA} = 3r$

$\Rightarrow \frac{A_{\square ABCD}}{A_{\square EFGA}} = \frac{p}{3} = 9$

$p = 27$

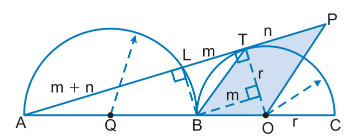
$\frac{15 + 11 + 12 + b}{2} = 27$

$38 + b = 54$

$b = 16$

Razonamiento y demostración

3.



Por dato: $(AL)(OC) = 16\ cm^2$

$\Rightarrow (m + n)(r) = 16$

Piden:

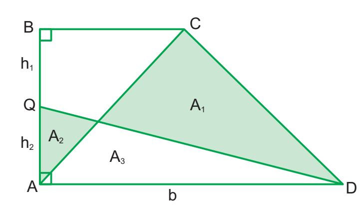
$S_{somb.} = S_{\Delta BTO} + S_{\triangle OTP} = \frac{r \cdot m}{2} + \frac{n \cdot r}{2}$

$S_{somb.} = \frac{r}{2}(m + n) = \frac{16}{2} = 8$

$\therefore S_{somb.} = 8\ cm^2$

Clave D

4.



Por dato: $(AD)(BQ) = 8\ cm^2$

$\Rightarrow (b)(h_1) = 8$

Del gráfico:

$A_1 + A_3 = \frac{b(h_1 + h_2)}{2}$ ...(1)

$A_2 + A_3 = \frac{bh_2}{2}$ ...(2)

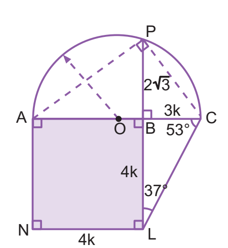
Restando (1) y (2):

$A_1 - A_2 = \frac{bh_1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$\therefore A_1 - A_2 = 4\ cm^2$

Clave B

5.



Por dato: ABLN es un cuadrado

$\Rightarrow NL = AB = 4k$

En el ⊿APC por relaciones métricas:

$PB^2 = (AB)(BC) \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = (4k)(3k)$

$12 = 12k^2$

$\Rightarrow k = 1$

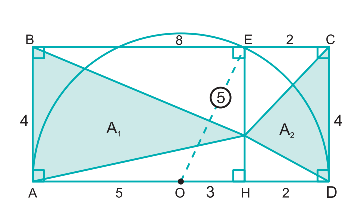
Piden:

$A_{\square ABLN} = (4k)^2 = 16k^2 = 16(1)^2$

$\therefore A_{\square ABLN} = 16\ cm^2$

Clave C

6.



En el ⊿OHE por el teorema de Pitágoras:

$EH = 4$

Luego:

$A_1 = \frac{(AB)(AH)}{2} = \frac{(4)(8)}{2} = 16\ cm^2$

$A_2 = \frac{(CD)(HD)}{2} = \frac{(4)(2)}{2} = 4\ cm^2$

Piden:

$A_1 + A_2 = 16 + 4$

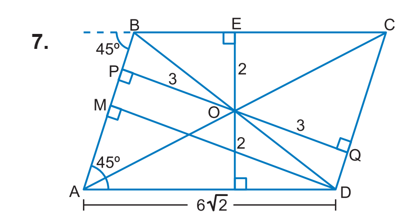
$\therefore A_1 + A_2 = 20\ cm^2$

Clave A



Resolución de problemas

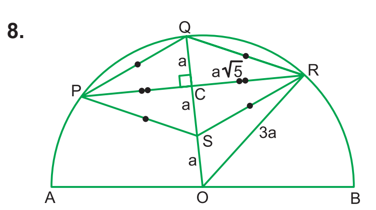
7.



Por dato: ABCD es un romboide.
Además: OE = 2 ∧ OP = 3
Trazamos: $\overline{MD} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow MD = 6$
Piden: $A_{\square ABCD} = (6\sqrt{2})(4) = 24\sqrt{2}$

Clave E

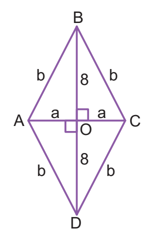
8.



En el ◺RCO por el teorema de Pitágoras:
$CR = a\sqrt{5}$
Piden: $A_{PQRS} = \frac{1}{2}(PR)(QS) = \frac{1}{2}(2a\sqrt{5})(2a)$
$\therefore APQRS = 2a^2\sqrt{5}$

Clave C

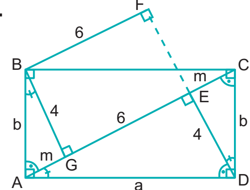
9.



Por dato:
$2a + 2b = 32 \Rightarrow a + b = 16$ ...(1)
En el ◺AOB por el teorema de Pitágoras:
$b^2 = a^2 + 8^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = 64$
$(b + a)(b - a) = 64 \Rightarrow b - a = 4$ ...(2)
Luego de (1) y (2): $a = 6 \wedge b = 10$
Piden: $A_{\lozenge ABCD} = \frac{1}{2}(BD)(AC)$
$\therefore A_{\lozenge ABCD} = \frac{1}{2}(16)(12) = 96$

Clave C

10.



Del gráfico: ◺BGA ≅ ◺DEC (caso ALA)
Además: ◺CED ~ ◺DEA
$\Rightarrow \frac{4}{m} = \frac{6 + m}{4}$
$16 = m(6 + m) \Rightarrow m = 2$
Entonces: $AC = 6 + 2m = 6 + 2(2) = 10$

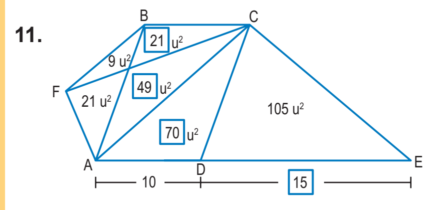
En el ◺ADC por relaciones métricas:
$ab = (AC)(ED) = (10)(4)$
Piden:
$A_{\square ABCD} = ab = (10)(4)$
$\therefore A_{\square ABCD} = 40$

Clave D

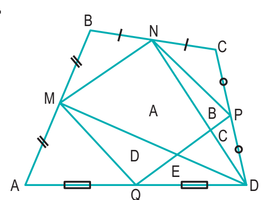
Nivel 2 (página 48) Unidad 2

Comunicación matemática

11.



12.



Como ▱MNPQ es un paralelogramo, luego:

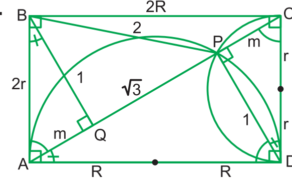
I. F
$A_{\square ABCD} = 2A_{\square MNPQ}$
$A_{\square ABCD} = 2(2B + 2C + 2D + 2E)$
$A_{\square ABCD} = 4(B + C + D + E)$

II. F
$A_{\square ABCD} = 2A_{\square MNPQ}$
$A_{\square ABCD} = 4(B + C + D + E) > 4(B + D)$

III. V
$\frac{A_{\square MNPQ}}{2} = B + C + D + E$
$\frac{A + B + D}{2} = B + C + D + E$
$A - 2C - 2E = B + D$
$\frac{A + B + D}{2} = C + E$

Razonamiento y demostración

13.

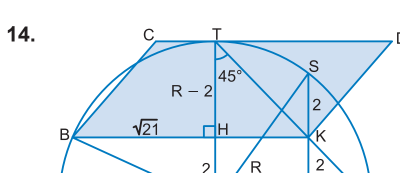


Del gráfico: ◺AQB ≅ ◺CPD (caso ALA)
Además: ◺APD ~ ◺DPC
$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{m + \sqrt{3}}{1} \Rightarrow m^2 + \sqrt{3}m - 1 = 0$
$\Rightarrow m = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$
En el ◺ADC por relaciones métricas:
$1 = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{4r^2} \Rightarrow 4 = \frac{R^2 + r^2}{R^2r^2}$
$R^2 + r^2 = 4R^2r^2$ ...(1)
Luego, del ◺ADC, por Pitágoras:
$4R^2 + 4r^2 = (\sqrt{7})^2$

$\Rightarrow R^2 + r^2 = \frac{7}{4}$
Reemplazando en (1):
$\frac{7}{4} = 4R^2r^2 \Rightarrow 7 = 16R^2r^2$
$\Rightarrow \sqrt{7} = 4Rr$
Piden: $A_{\square ABCD} = (2R)(2r) = 4Rr$
$\therefore A_{\square ABCD} = \sqrt{7}$

Clave C

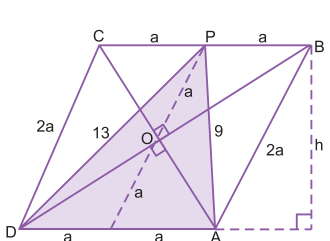
14.



Del gráfico:
Por el teorema de Pitágoras en el ◺OES:
$R^2 = (R - 2)^2 + (4)^2$
$R^2 = R^2 - 4R + 20 \Rightarrow R = 5$
Por el teorema de Pitágoras en el ◺BHO:
$BH = \sqrt{21} \Rightarrow BK = 3 + \sqrt{21}$
Piden:
$A_{\square BCDK} = (TH)(BK) = (R - 2)(BK)$
$\therefore A_{\square BCDK} = 3(3 + \sqrt{21})$

Clave B

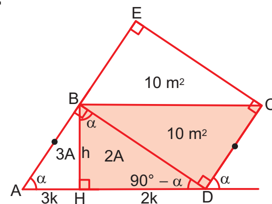
15.



En el △DPA por el teorema de la mediana:
$2(2a)^2 + \frac{(2a)^2}{2} = 13^2 + 9^2$
$10a^2 = 250$
$\Rightarrow a = 5$
Por el teorema de Herón en el △DPA:
$h = \frac{2}{2(5)}\sqrt{(16)(3)(7)(6)}$
$h = \frac{12\sqrt{14}}{5}$
* Se debe pedir:
$A_{\square ABCD} = (DA)h = (2a)h$
$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 2(5)\left(\frac{12\sqrt{14}}{5}\right)$
$\therefore A_{\square ABCD} = 24\sqrt{14}$

Clave B

16.

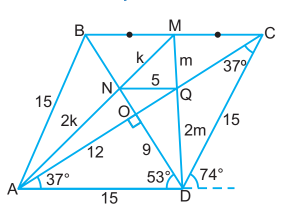


Del gráfico: ABCD es un paralelogramo.
Además: $\overline{BC}$ divide a BECD en dos triángulos congruentes.
También: ◺ABD ≅ ◺CDB (caso LAL)
$\Rightarrow 3A + 2A = 10$
$5A = 10 \Rightarrow A = 2$
Piden:
$A_{BCDH} = 10 + 2A = 10 + 2(2)$
$\therefore A_{BCDH} = 14\ m^2$

Clave C

Resolución de problemas

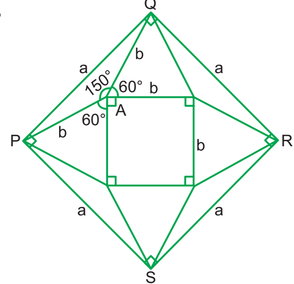
17.



Del gráfico:
N: baricentro del △ABC
Q: baricentro del △ADC
Luego: △NMQ ~ △AMD ⇒ AD = 15
Entonces:
AC = 24 ∧ BD = 18
$\therefore A_{\lozenge ABCD} = \dfrac{24(18)}{2} = 216$

Clave B

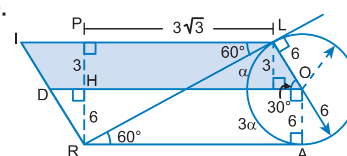
18.



Se deduce que PQRS es un cuadrado.
En el △PAQ por la ley de cosenos:
$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos150°$
$a^2 = 2b^2 + 2b^2\cos30°$
$a^2 = b^2(2 + \sqrt{3})$
Piden:
$A_{\square PQRS} = a^2 = b^2(2 + \sqrt{3})$

Clave D

19.

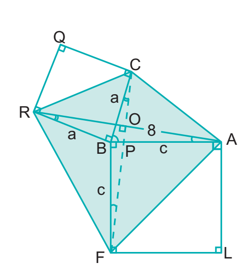


Del gráfico:
$3\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 30°$
Luego, por propiedad:
$m\angle ARL + 4\alpha = 180°$
$\Rightarrow m\angle ARL = 180° - 4(30°) = 60°$
Entonces:
$m\angle ARL = m\angle RLP = 60°$ (ángulos alternos internos).

Del ◺RPL (notable de 30° y 60°).
$PR = 9 \Rightarrow PL = 3\sqrt{3}$
Luego, en el ◺IPR: $m < RIP = 30°$
$\Rightarrow IP = 9\sqrt{3}$
Piden:
$A_{DILO} = (IL)(PH) = (9\sqrt{3} + 3\sqrt{3})3$
$\therefore A_{DILO} = 36\sqrt{3}$

Clave A

20.



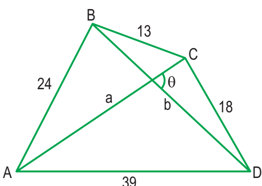
Del gráfico
△ABR ≅ △FBC (caso LAL)
⇒ FC = AR = 8
Además: el ⏢OBRC es inscriptible.
⇒ m∠COR = m∠CBR = 90°
Piden:
$A_{AFRC} = \dfrac{1}{2}(FC)(AR)\text{sen}90°$
$A_{AFRC} = \dfrac{1}{2}(8)(8)(1) = 32$

Clave E

Nivel 3 (página 48) Unidad 2

Comunicación matemática

21.



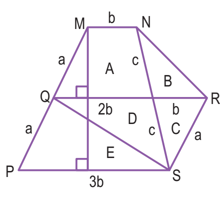
Del enunciado:
$A_{\square ABCD} = \dfrac{ab\text{sen}\theta}{2}$
$2 \times 8\sqrt{290} = ab\left(\dfrac{16\sqrt{290}}{609}\right)$

$a \times b = 609 = 3 \times 7 \times 29$

1×609 ✗
3×203 ✗
7×87 ✗
21×29 ✓

Se debe cumplir: $p < a + b < 2p$
$47 < a + b < 94$
Como $m\angle BAD > m\angle ADC$, entonces:
$a = 21 \wedge b = 29$

22.

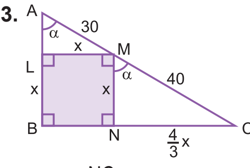


Se observa que: B = C
$A = \dfrac{3bh}{2} \wedge E = \dfrac{h(3b)}{2} \Rightarrow A = E$

Como 2C = D y E = D + C, entonces:
E = 3 C > 2C
Como D = 2C, entonces:
D > C
Como B = C y E = 3C entonces:
3C > C
E > B

Razonamiento y demostración

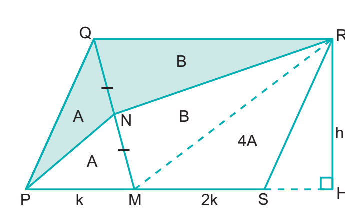
23.



$\dfrac{x}{30} = \dfrac{NC}{40}$
$\dfrac{4}{3}x = NC$
$x^2 + \left(\dfrac{4}{3}x\right)^2 = 40^2$
$\dfrac{25}{9}x^2 = 1600$
$x^2 = 576$
$\therefore S_{BLMN} = x^2 = 576$

Clave D

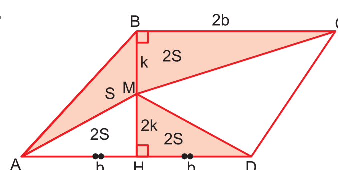
24.



$A_{\triangle PQM} = \dfrac{kh}{2} = 2A \Rightarrow kh = 4A$
$A_{\triangle MRS} = \dfrac{2kh}{2} = kh \Rightarrow A_{\triangle MRS} = 4A$
Por dato: $A_{\square PQRS} = 12$
$\Rightarrow 6A + 2B = 12$
$\therefore 3A + B = 6\ cm^2$

Clave C

25.

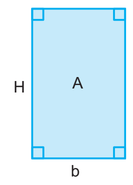


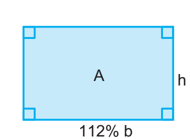
Del gráfico:
$S_{\triangle ABM} = \dfrac{bk}{2} = S \Rightarrow bk = 2S$
$\Rightarrow S_{◺MBC} = \dfrac{k(2b)}{2} = bk = 2S$
Piden:
$\dfrac{S_{Total}}{S_{Somb.}} = \dfrac{(2b)(3k)}{5S} = \dfrac{6(bk)}{5S} = \dfrac{6(2S)}{5S}$
$\therefore \dfrac{S_{Total}}{S_{Somb.}} = \dfrac{12}{5}$

Clave D



26. Por dato:





Entonces: $bH = (112\%b)h$

$\Rightarrow h = \dfrac{25H}{28}$

Sea x: el porcentaje en que disminuye la altura.

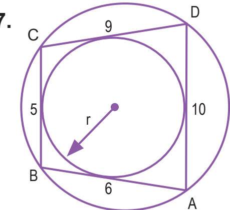
$\Rightarrow x = \left(\dfrac{H-h}{H}\right)100\% = \left(\dfrac{H-\dfrac{25H}{28}}{H}\right)100\%$

$\therefore x = \dfrac{75}{7}\% = 10\dfrac{5}{7}\%$

Clave E

Resolución de problemas

27.



Por el teorema de Pitot:
$9 + 6 = 5 + AD$
$\Rightarrow AD = 10$

Área del cuadrilátero bicéntrico ABCD:

$A_{\square} = \sqrt{(6)(5)(9)(10)} = 30\sqrt{3}$

Área del cuadrilátero circunscrito ABCD:

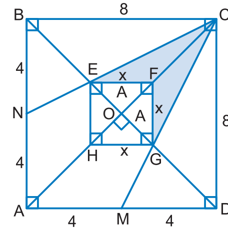
$p = \dfrac{6+5+9+10}{2} = 15$

$A_{ABCD} = p\,r \Rightarrow 30\sqrt{3} = (15)\,r$

$\therefore r = 2\sqrt{3}$

Clave D

28.



El cuadrado menor está centrado en forma simétrica en el cuadrado mayor.

$2A + 4 = \dfrac{1}{2}(x\sqrt{2})(4\sqrt{2})$

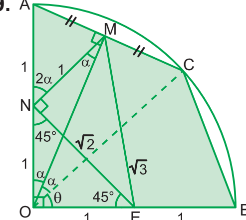
$\dfrac{x^2}{2} + 4 = 4x \Rightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{2}$

Pero: $x < AM \Rightarrow x < 4$

$\therefore x = (4 - 2\sqrt{2})$ m

Clave E

29.



Trazamos: la mediana MN del ⊿AMO.

$\Rightarrow MN = AN = NO = 1$

Luego, el ⊿NOE resulta notable de 45°.

$\Rightarrow NE = \sqrt{2}$

Del gráfico: el triángulo MNE cumple el teorema de Pitágoras:

$(ME)^2 = (MN)^2 + (NE)^2 \Rightarrow m\angle MNE = 90°$

$\Rightarrow 2\alpha = 45° \ \wedge \ \theta = 45°$

Piden:

$A_{\square ACBO} = A_{\triangle AOC} + A_{\triangle COB}$

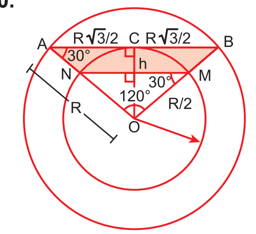
$\Rightarrow A_{\square ACBO} = \dfrac{(2)(2)}{2}\text{sen}2\alpha + \dfrac{(2)(2)}{2}\text{sen}\theta$

$A_{\square ACBO} = 2\text{sen}45° + 2\text{sen}45° = 4\text{sen}45°$

$\therefore A_{\square ACBO} = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$

Clave B

30.



Del gráfico:

Del ⊿ACO (notable de 30° y 60°)

$\Rightarrow CO = \dfrac{R}{2} = OM$

Además:

$h = \dfrac{R}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{2}\right) = \dfrac{R}{4} \ \wedge \ MN = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$A_{\square ANMB} = \dfrac{1}{2}(AB + MN)h$

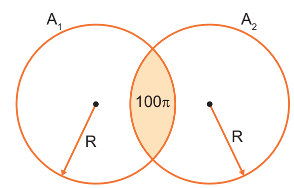
Piden:

$\therefore A_{\square ANMB} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{16}$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 50) Unidad 2

1.

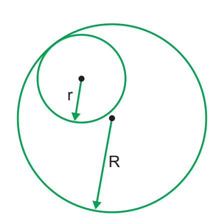


Por dato:
$A_1 \cap A_2 = 100\pi\ m^2$
$A_1 \cup A_2 = 400\pi\ m^2$

Entonces: $(A_1 - 100\pi) + A_2 = 400\pi$
$A_1 + A_2 = 500\pi$
$\pi R^2 + \pi R^2 = 500\pi$
$\pi R^2 = 250\pi$
$\therefore R = 5\sqrt{10}$ m

Clave B

2.



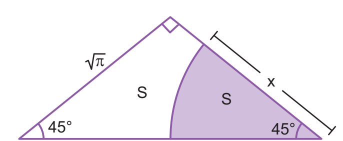
Por dato: $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi r^2$

$r^2 = \dfrac{R^2}{2}$

$\therefore\ r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Clave C

3.



Del gráfico:

$S = \dfrac{\pi x^2 45°}{360°} = \dfrac{\pi x^2}{8}$ ...(1)

Además:

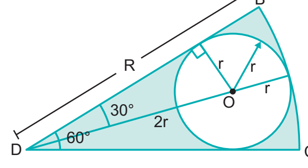
$2S = \dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow S = \dfrac{\pi}{4}$ ...(2)

Igualando (1) en (2):

$\dfrac{\pi x^2}{8} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

Clave C

4.



Sea A: el área de la región sombreada.
Entonces:
$A = A_{\triangleleft ABC} - A_{\odot}$

$A = \dfrac{\pi R^2 60°}{360°} - \pi r^2$

$A = \dfrac{\pi R^2}{6} - \pi r^2$ ...(1)

Del gráfico:

$3r = R \Rightarrow r^2 = \dfrac{R^2}{9}$ ...(2)

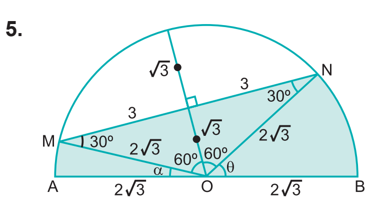
Reemplazando (2) en (1):

$A = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{\pi R^2}{9}$

$\therefore A = \dfrac{\pi R^2}{18}$

Clave A

5.



Del gráfico: $\alpha + \theta = 60°$

Luego:

$A_{somb.} = A_{\triangleleft AOM} + A_{\triangle MON} + A_{\triangleleft NOB}$

$A_{somb.} = \dfrac{\pi(2\sqrt{3})^2\alpha}{360°} + \dfrac{(6)(\sqrt{3})}{2} + \dfrac{\pi(2\sqrt{3})^2\theta}{360°}$

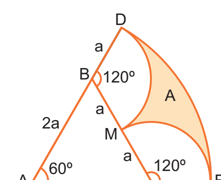
$A_{somb.} = \dfrac{\pi}{30°}(\alpha + \theta) + 3\sqrt{3}$

$A_{somb.} = \dfrac{\pi}{30°}(60°) + 3\sqrt{3} = 2\pi + 3\sqrt{3}$

$\therefore A_{somb.} = (2\pi + 3\sqrt{3})\ cm^2$

Clave E

6.



Del gráfico:

$A = A_{\triangleleft DAE} - A_{\triangle ABC} - 2A_{\triangleleft MCE}$

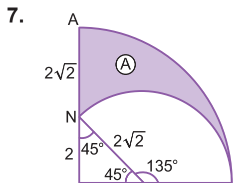
$A = \dfrac{\pi(3a)^2(60°)}{360°} - \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} - 2\left[\dfrac{\pi(a)^2(120°)}{360°}\right]$

$A = \dfrac{3a^2\pi}{2} - a^2\sqrt{3} - \dfrac{2a^2\pi}{3}$

$\therefore A = \dfrac{a^2}{6}(5\pi - 6\sqrt{3})$

Clave B

7.



Del gráfico:

$A = A_{\triangle AOB} - A_{\triangleleft NPB} - A_{\triangle NOP}$

$A = \dfrac{\pi(2+2\sqrt{2})^2}{4} - \dfrac{\pi(2\sqrt{2})^2 135°}{360°} - \dfrac{2(2)}{2}$

$\Rightarrow A = \pi(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 3\pi - 2$

$\therefore A = 2(\pi\sqrt{2} - 1)$

Clave B

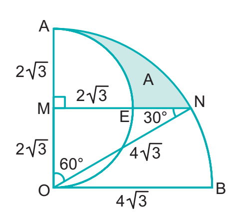
8. $S = S_{\square ABCD} - S_{\triangle ADC}$

$S = (2)^2 - \dfrac{90°\pi(2)^2}{360°}$

$\therefore S = 4 - \pi$

Clave A

9.



Del gráfico, se deduce que el ⊿OMN es notable de 30° y 60°.

Luego: $A = A_{\triangleleft AON} - A_{\triangle AME} - A_{\triangle OMN}$

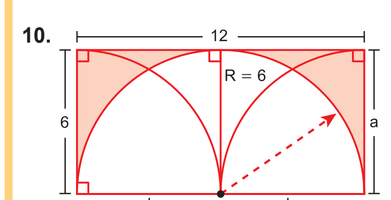
$A = \dfrac{\pi(4\sqrt{3})^2 60°}{360°} - \dfrac{\pi(2\sqrt{3})^2}{4} - \dfrac{(2\sqrt{3})6}{2}$

$A = 8\pi - 3\pi - 6\sqrt{3} = 5\pi - 6\sqrt{3}$

$\therefore A = (5\pi - 6\sqrt{3})\ cm^2$

Clave A

10.



Sea A el área de la región sombreada:

$\Rightarrow A = A_{\square} - A_{\circ}$

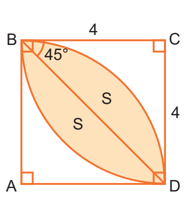
$A = 6\,(12) - \dfrac{\pi(6^2)}{2}$

$A = 72 - 18\pi$

$\therefore A = 18(4 - \pi)$

Clave B

11.



$S = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BAD}$

$S_{\triangle ABD} = \dfrac{\pi(4^2)}{4} = 4\pi\ m^2$

$S_{\triangle BAD} = \dfrac{4^2}{2} = 8\ m^2$

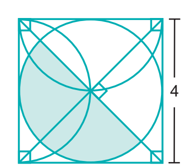
$\Rightarrow S = 4\pi - 8$

$2S = 8(\pi - 2)\ m^2$

Clave A

12. Trasladando áreas:

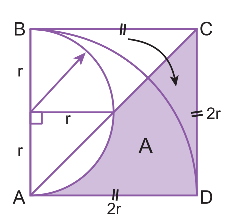




$\therefore S_x = \dfrac{\pi(2^2)}{2} = 2\pi$

Clave B

13.



$A = \dfrac{2r(2r)}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4}r^2 - \dfrac{r^2}{2}\right)$

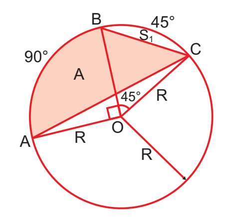
$A = 2r^2 + \dfrac{r^2}{2} - \dfrac{\pi}{4}r^2$

$A = \dfrac{5r^2}{2} - \dfrac{\pi r^2}{4}$

$\therefore \; A = \dfrac{r^2}{2}(5 - \pi/2)$

Clave B

14.



Del gráfico:

$S_1 = \dfrac{\pi R^2 45°}{360°} - \dfrac{R^2}{2}\,\text{sen}45°$

$S_1 = \dfrac{\pi R^2}{8} - \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}$

Luego:

$A = A_{\triangleleft AOC} - S_1 - A_{\triangle AOC}$

$A = \dfrac{\pi R^2 135°}{360°} - \left(\dfrac{\pi R^2}{8} - \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}\right) - \dfrac{R^2}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$A = \dfrac{3\pi R^2}{8} - \dfrac{\pi R^2}{8} = \dfrac{\pi R^2}{4}$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 52) Unidad 2

Comunicación matemática

1. $\dfrac{A_{\frown CD}}{A_{\frown AB}} = \dfrac{\boxed{R^2}}{\boxed{r^2}} = \boxed{9}$

2. $A = \dfrac{\pi\,\boxed{16}^2}{4} = 64\pi$

$B = \dfrac{\pi\,\boxed{18}^2}{4} = 81\pi$

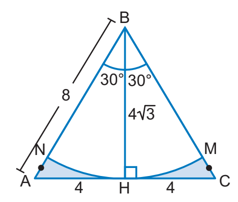
$A + B = 64\pi + 81\pi = \boxed{145\pi}$

3. I. Cumple la definición.
II. No cumple la definición.
III. Tiene un lado convexo.
IV. Una curva es elíptica.

Clave B

Razonamiento y demostración

4.



Del gráfico: $A_{somb.} + A_{\triangleleft NBM} = A_{\triangle ABC}$

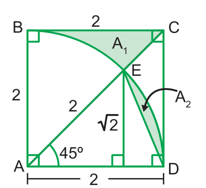
$A_{somb.} + \dfrac{\pi(4\sqrt{3})^2 60°}{360°} = \dfrac{(8)^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{somb.} + 8\pi = 16\sqrt{3}$

$\therefore A_{somb.} = 8(2\sqrt{3} - \pi)$

Clave B

5.



Del gráfico:

$A_1 = A_{\triangle ABC} - A_{\triangleleft BAE}$

$A_1 = \dfrac{(2)(2)}{2} - \dfrac{\pi(2)^2 45°}{360°} = 2 - \dfrac{\pi}{2}$

$A_2 = A_{\triangleleft BAD} - A_{\triangle AED}$

$A_2 = \dfrac{\pi(2)^2 45°}{360°} - \dfrac{(2)(\sqrt{2})}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

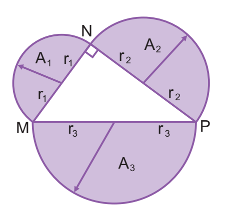
Piden:

$A_{somb.} = A_1 + A_2 = 2 - \sqrt{2}$

Clave A

6.





Por dato: $A_1 = 4 \Rightarrow \dfrac{\pi r_1^2}{2} = 4 \Rightarrow \pi r_1^2 = 8$

$A_2 = 6 \Rightarrow \dfrac{\pi r_2^2}{2} = 6 \Rightarrow \pi r_2^2 = 12$

En el $\triangle$MNP por el teorema de Pitágoras:

$(2r_3)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2$

$4r_3^2 = 4r_1^2 + 4r_2^2$

$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$

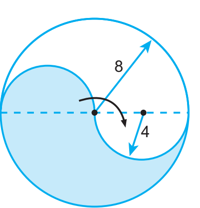
$\pi r_3^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$\Rightarrow 2(A_3) = (8) + (12)$

$\therefore A_3 = 10\ m^2$

Clave B

7.



Al trasladar el área del semicírculo menor, el área sombreada es equivalente a la región del semicírculo mayor.

Entonces: $A_{somb.} = \dfrac{\pi(8)^2}{2} = 32\pi$

Clave E

Resolución de problemas

8. Del problema se tiene que:

$A_1 = A \wedge r_1 = r$ ...(1)

$A_2 = 2A \wedge r_2 = r + (\sqrt{2} - 1)$ ...(2)

De (1): $A = \pi r^2$

De (2): $2A = \pi(r + \sqrt{2} - 1)^2$

$\Rightarrow 2(\pi r^2) = \pi(r + \sqrt{2} - 1)^2$

$2(r^2) = r^2 + 2r(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$

$r^2 - 2r(\sqrt{2} - 1) - (3 - 2\sqrt{2}) = 0$

$r \quad\quad +(3 - 2\sqrt{2})$

$r \quad\quad -1$

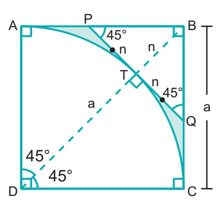
$\Rightarrow r = -(3 - 2\sqrt{2}) \wedge r = 1$

Como: $r = -3 + 2\sqrt{2} < 0$ (no cumple)

$\therefore r = 1$

Clave C

9.



Del gráfico: $DB = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow a + n = a\sqrt{2} \Rightarrow n = a(\sqrt{2} - 1)$

Luego:

$A_{somb.} = A_{\square} - A_{\text{◺}} - A_{\triangle PBQ}$

$A_{somb.} = a^2 - \dfrac{\pi a^2}{4} - \dfrac{(2n)(n)}{2}$

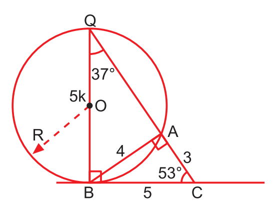
$A_{somb.} = a^2 - \dfrac{\pi a^2}{4} - n^2 = \dfrac{4a^2 - \pi a^2}{4} - (a(\sqrt{2} - 1))^2$

$A_{somb.} = \dfrac{4a^2 - \pi a^2}{4} - a^2(3 - 2\sqrt{2})$

$\therefore A_{somb.} = \left(\dfrac{8\sqrt{2} - 8 - \pi}{4}\right)a^2$

Clave E

10.





El ◺BAC es notable de 37° y 53°
Del gráfico: la m∠BAQ = 90° ⇒ QB es diámetro.
En el ◺QAB:

$AB = 3k \Rightarrow 4 = 3k \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

$QB = 5k \Rightarrow 2R = 5\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow R = \left(\frac{10}{3}\right)$

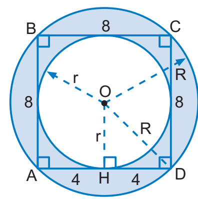
Piden:

$A_{\odot} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{10}{3}\right)^2$

$\therefore A_{\odot} = \frac{100}{9}\pi$

Clave D

11.



En el ◺OHD por el teorema de Pitágoras:
$R^2 = r^2 + 4^2$
$\Rightarrow R^2 - r^2 = 16$

Piden:
$A_{somb.} = \pi R^2 - \pi r^2$
$\Rightarrow A_{somb.} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(16)$
$\therefore A_{somb.} = 16\pi\ m^2$

Clave E

Nivel 2 (página 53) Unidad 2

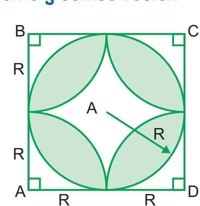
Comunicación Matemática

12. $A_{\triangle ABC}$ = $A_4 - A_3$ [<] A_4
$A_{\triangle ABC}$ [=] $A_1 + A_2$
$A_4 = A_1 + A_2 + A_3$ [>] $A_1 + A_3$

13. A = [B]
C = [D]
A + B + C + D = [$\frac{49\pi}{4}$]

Razonamiento y demostración

14.



Del gráfico:
$A_{somb.} + A = \pi R^2$ ...(1)
Además: $A = A_{\square} - 4A_{◺}$

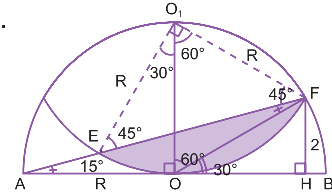
$A = (2R)^2 - 4\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)$

$A = 4R^2 - \pi R^2$

Reemplazando en (1):
$A_{somb.} + (4R^2 - \pi R^2) = \pi R^2$
$A_{somb.} = 2\pi R^2 - 4R^2$
$\therefore A_{somb.} = 2R^2(\pi - 2)$

Clave C

15.



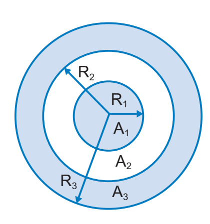
Del gráfico:
El $\triangle OO_1F$ es equilátero.
$\Rightarrow m\overset{\frown}{OF} = 60° \Rightarrow m\angle FOB = 30°$
El $\triangle AOF$ es isósceles $\Rightarrow m\angle AFO = 15°$
También: el $\triangle EO_1F$ es isósceles.
Además: $m\angle EO_1F = 90°$
$\Rightarrow m\angle O_1EF = 45°$
Del ◺OHF notable de 30° y 60°: R = 4
Piden:
$A_{somb.} = A_{\frown EF} = A_{◺EO_1F} - A_{◺EO_1F}$

$A_{somb.} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{\pi(4)^2}{4} - \frac{(4)^2}{2}$

$A_{somb.} = 4\pi - 8$

Clave E

16.



Del gráfico:
$A_1 = \pi R_1^2;\ A_2 = \pi(R_2^2 - R_1^2);\ A_3 = \pi(R_3^2 - R_2^2)$
Por dato: $A_1 = A_2 = A_3$
Primero:
$A_1 = A_2 \Rightarrow \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$
$R_1^2 = R_2^2 - R_1^2$
$2R_1^2 = R_2^2$ ...(1)
Luego:
$A_2 = A_3 \Rightarrow \pi(R_2^2 - R_1^2) = \pi(R_3^2 - R_2^2)$
$2R_2^2 - R_1^2 = R_3^2$
$2(2R_1^2) - R_1^2 = R_3^2$
$3R_1^2 = R_3^2$ ...(2)

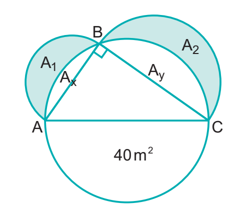
De (1) y (2) se deduce:

$R_1^2 = \frac{R_2^2}{2} = \frac{R_3^2}{3}$

$\therefore R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{2}} = \frac{R_3}{\sqrt{3}}$

Clave C

17.



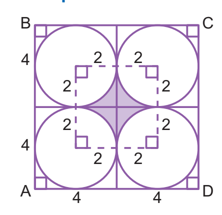
Por dato: $A_1 = 10 \wedge A_2 = 18$
Por propiedad de lúnulas:
$A_{◺ABC} = A_1 + A_2$
$\Rightarrow A_{◺ABC} = (10) + (18) = 28$

Del gráfico:
$A_x + A_y + A_{◺ABC} = 40$
$A_x + A_y + (28) = 40$
$\therefore A_x + A_y = 12\ m^2$

Clave D

Resolución de problemas

18.



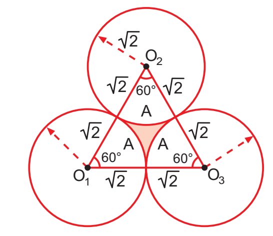
Del gráfico:
$A_{somb.} = A_{\square} - 4A_{◺}$

$A_{somb.} = (4)^2 - 4\left(\frac{\pi 2^2}{4}\right) = 16 - 4\pi$

$\therefore A_{somb.} = (16 - 4\pi)\ m^2$

Clave C

19.



Del gráfico:

$A = \frac{\pi(\sqrt{2})^2 60°}{360°} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$

Sea el área del triángulo equilátero $O_1O_2O_3$: $A_{\triangle}$

$\Rightarrow A_{\triangle} = \frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle} = 2\sqrt{3}$

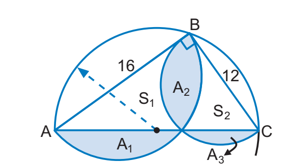
Luego:
$A_{somb.} = A_{\triangle} - 3A$

$A_{somb.} = (2\sqrt{3}) - 3\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore A_{somb.} = 2\sqrt{3} - \pi$

Clave E

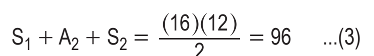
20.



Por dato: AC = 20 y AB = 16
Entonces en el ◺ABC por el teorema de Pitágoras: BC = 12
Del gráfico:

$A_1 + S_1 + A_2 = \frac{\pi(8)^2}{2} = 32\pi$ ...(1)

$A_2 + S_2 + A_3 = \frac{\pi(6)^2}{2} = 18\pi$ ...(2)



$S_1 + A_2 + S_2 = \frac{(16)(12)}{2} = 96$ ...(3)

Sumando (1) y (2), luego restando (3):

$A_1 + A_2 + A_3 = 50\pi - 96$

$\therefore A_{somb.} = (50\pi - 96)\ m^2$

Clave A

Nivel 3 (página 54) Unidad 2

Comunicación matemática

21. De la figura: $\theta = 120°$

$\Rightarrow A = \frac{\theta R^2 \pi}{360}$

$A = R^2 \frac{\pi}{3}$

I. (V)

$\frac{A}{R^2} \approx 1{,}047$

II. (F)

$R^2 + \frac{R^2\pi}{3} = 27$

$R^2 = \frac{81}{3+\pi}$

$R = \frac{9}{\sqrt{3+\pi}}$

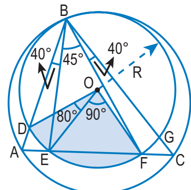
III. (V)

$R^2 = 3\frac{A}{\pi}$

$R^2 = 3\frac{(12)\pi}{\pi}$

$R = 6$

22.



Por propiedad $m\angle ABE = m\angle FBC = 40°$

Del enunciado: $A_{\triangleleft EOF} = \frac{80\pi}{360}R^2$

$32\pi = \frac{2\pi}{9}R^2$

$R^2 = 144$

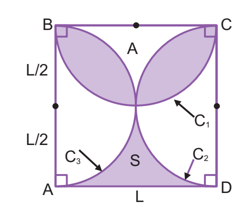
$R = 12$

Luego: $A_{\triangleleft EOF} = (12)^2\frac{\pi}{4}$

$A_{\triangleleft EOF} = 36\pi$

Razonamiento y demostración

23.



Por dato: ABCD es un cuadrado

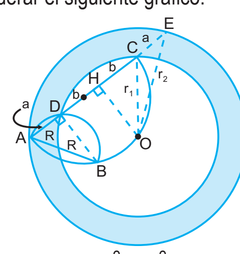
Por presentar simetría: A = S

$\Rightarrow A_{somb.} = A_{\frown} = \frac{\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2}$

$\therefore A_{somb.} = \frac{\pi L^2}{8}$

Clave E

24. Considerar el siguiente gráfico:



Piden: $A_{somb.} = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ ...(1)

Trazamos $\overline{OH} \perp \overline{AE}$, entonces:

$DH = HC = b \wedge AH = HE$

Por propiedad:

$(AB)^2 = (AD)(AC)$

$(2R)^2 = (a)(a + 2b)$

$\Rightarrow a(a + 2b) = 4R^2$ ...(2)

En el ΔEOC por el teorema de Euclides:

$r_2^2 = r_1^2 + a^2 + 2(a)(b)$

$r_2^2 - r_1^2 = a^2 + 2ab$

$\Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = a(a + 2b)$ ...(3)

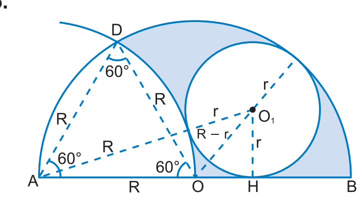
De (2) y (3): $r_2^2 - r_1^2 = 4R^2$

Reemplazando en (1): $A_{somb.} = \pi(4R^2)$

$\therefore A_{somb.} = 4\pi R^2$

Clave C

25.



En el ΔAO_1O, por el teorema de Herón:

$p = \frac{R + r + R - r + R}{2} = \frac{3R}{2}$

$\Rightarrow r = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{3R}{2}\left(\frac{3R}{2} - R\right)\left(\frac{3R}{2} - R - r\right)\left(\frac{3R}{2} - R + r\right)}$

Reduciendo se tiene: $r^2 = \frac{3R^2}{16}$

Luego:

$A_{\frown DO} = \frac{60°\pi R^2}{360°} - \frac{R^2 \operatorname{sen}60°}{2}$

$A_{\frown DO} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{\triangleleft DOB} = \frac{\pi R^2(120°)}{360°} = \frac{\pi R^2}{3}$

Del gráfico:

$A_{\triangleleft DOB} = A_{\frown DO} + A_{somb.} + A_{\odot}$

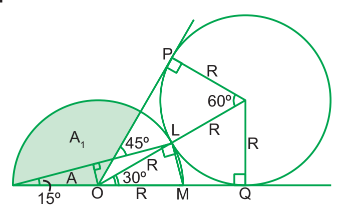
$\frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + A_{somb.} + \pi r^2$

$\Rightarrow A_{somb.} = \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \pi\left(\frac{3R^2}{16}\right)$

$\therefore A_{somb.} = \frac{R^2}{48}(12\sqrt{3} - \pi)$

Clave C

26.



Del gráfico:

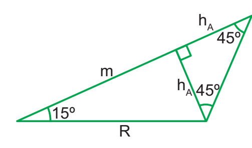
$A_1 + A = \frac{\pi R^2\, 120°}{360°} = \frac{\pi R^2}{3}$ ...(1)

En el triángulo A, la altura es la mitad de la longitud de LM.

Por polígonos regulares:

$LM = \ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow h_A = \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

La base del triángulo A es igual a:



Entonces: $m = ap_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Luego: $A = \frac{1}{2}(m + h_A)h_A$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)\frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$A = \frac{R^2}{8}(3 - \sqrt{3})$

Reemplazando en (1):

$\Rightarrow A_1 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2(3 - \sqrt{3})}{8}$

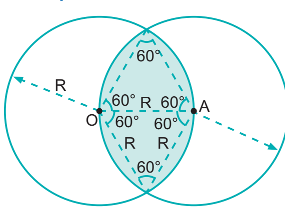
Por dato: $R = 2\sqrt{6}$

$\therefore A_1 = 8\pi + 3\sqrt{3} - 9$

Clave E

Resolución de problemas

27.



Del gráfico: los cuatro segmentos circulares que se forman tienen la misma área.

$A_{\frown} = \frac{60°\pi(R)^2}{360°} - \frac{R^2\operatorname{sen}60°}{2}$

$\Rightarrow A_{\frown} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Luego:

$A_{somb.} = 4(A_{\frown}) + 2(A_{\Delta equilátero})$

$A_{somb.} = 4\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) + 2\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$A_{somb.} = \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A_{somb.} = \frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$

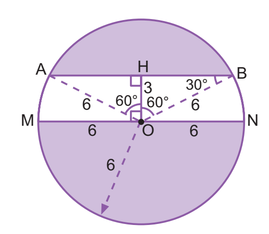
Por dato: R = 1,25

$\Rightarrow A_{somb.} = \frac{(1,25)^2}{6}[4(3,14) - 3(1,73)]$

$\therefore A_{somb.} = 1,92$

Clave C

28.



Del gráfico:

El ◺OHB resulta ser notable de 30° y 60°

Luego:

$A_{somb.} = A_{\frown AB} + A_{\frown}$

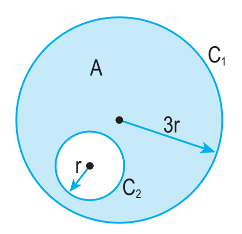
$A_{somb.} = \left[\frac{(120°)\pi(6)^2}{360°} - \frac{6^2 \text{sen}120°}{2}\right] + \frac{\pi(6)^2}{2}$

$A_{somb.} = (12\pi - 9\sqrt{3}) + 18\pi$

$\therefore A_{somb.} = 30\pi - 9\sqrt{3}$

Clave D

29.

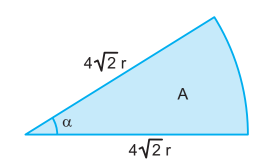


El área sobrante (A) es igual a:

$A = \pi(3r)^2 - \pi(r)^2$

$A = 9\pi r^2 - \pi r^2 = 8\pi r^2$

Luego:



Entonces:

$A = \frac{\pi(4\sqrt{2}r)^2 \alpha}{360°} = 8\pi r^2$

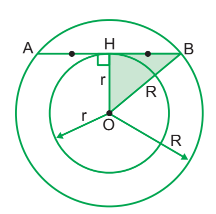
$\frac{32r^2\alpha}{360°} = 8r^2$

$\Rightarrow \alpha = \frac{360°}{4}$

$\therefore \alpha = 90°$

Clave C

30.



Por dato:

$\pi R^2 = 78,5 \wedge \pi r^2 = 28,26$

En el ◺OHB por el teorema de Pitágoras:

$R^2 = r^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

Luego:

$(AB)^2 = 4(R^2 - r^2)$

$\pi(AB)^2 = 4(\pi R^2 - \pi r^2)$

Entonces:

$(AB)^2 = \frac{4}{\pi}(78,5 - 28,26) = \frac{4(50,24)}{(3,14)}$

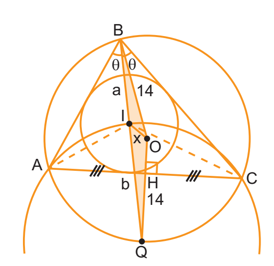
$(AB)^2 = 64$

$\therefore AB = 8$ m

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 55) Unidad 2

1. Graficamos el △ABC y ubicamos su incentro (I) y circuncentro (O).



Vemos que $\overline{OQ}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $\overline{BQ}$ a la bisectriz del ∠ABC.

$\Rightarrow m\widehat{AQ} = m\widehat{BC}$ y $\overline{AH} \cong \overline{HC}$ $\Rightarrow$ Q es el circuncentro del △AIC.

Además B, I y Q son colineales.

En el △BOQ aplicamos el teorema de Steward:

$14^2(b) + 14^2(a) = x^2(a + b) + ab(a + b)$

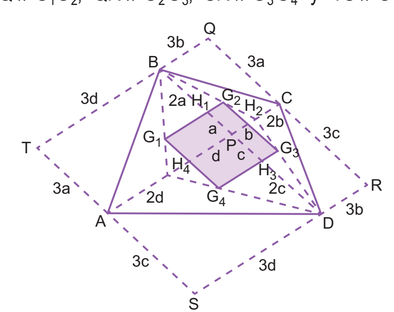
$14^2(a + b) = (a + b)(x^2 + ab)$; (dato: ab = 171)

$14^2 = x^2 + 171$

$\therefore x = 5$ m

Clave E

2. Graficamos $\overline{TQ} \parallel \overline{G_1G_2}$; $\overline{QR} \parallel \overline{G_2G_3}$; $\overline{SR} \parallel \overline{G_3G_4}$ y $\overline{TS} \parallel \overline{G_1G_4}$.



Dado que G_1; G_2; G_3 y G_4 son baricentros, entonces el cuadrilátero $G_1G_2G_3G_4$ es un paralelogramo y sus lados son paralelos a las diagonales AC y BD.

Además: $\frac{BH_1}{H_1P} = \frac{2a}{a}; \frac{CH_2}{H_2P} = \frac{2b}{b}; \frac{DH_3}{H_3P} = \frac{3c}{c}; \frac{AH_4}{H_4P} = \frac{2d}{d}$

Del dato: $A_{\square G_1G_2G_3G_4} = 2\ cm^2$

$(a + c)(b + d) = 2\ cm^2$ ... (I)

En el cuadrilátero TQRS:

$A_{\square TQRS} = (3a + 3c)(3b + 3d)$

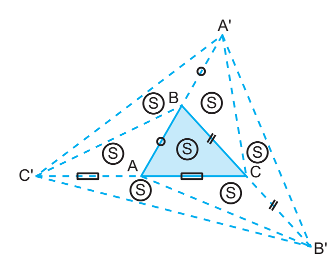
$= 9(a + c)(b + d)$

Reemplazando de (I):

$A_{\square TQRS} = 9(2\ cm^2) \Rightarrow A_{\square TQRS} = 18\ cm^2$

Clave A

3. Hallamos los puntos simétricos A', B' y C' con respecto a B, C y A, respectivamente, generándose el $\triangle$A'B'C'; vemos que los puntos A, B y C son los puntos medios de $\overline{CC'}$, $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ respectivamente.



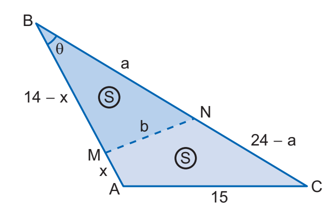
Denominamos: $A_{\triangle ABC} = S$

Por propiedad: $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle C'BA} = A_{\triangle C'A'B} = A_{\triangle A'BC} = S$ (etc.)

Del gráfico: $A_{\triangle A'B'C'} = 7S$

Clave C

4. Graficamos el $\triangle$ABC y trazamos $\overline{MN}$ de tal modo que $2p_{\triangle ABC} = 2p_{\square MNCA}$.



Reemplazamos: $14 - x + a + b = b + 24 - a + 15$

$2a = 25 + 2x$

$a = \frac{1}{2}(25 + 2x)$ ... (I)

Luego, vemos que: $A_{\triangle ABC} = 2A_{\triangle BMN}$

$\frac{1}{2}(14)(24)\text{sen}\theta = 2\left(\frac{1}{2}\right)a(14 - x)\text{sen}\theta$

Reemplazamos de (I): $24(14) = (2x + 25)(14 - x)$

$28x - 2x^2 + 25(14) - 25x = 24(14)$

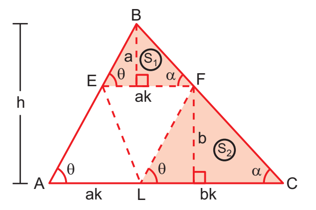
$2x^2 - 3x - 14 = 0$

$(2x - 7)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Clave B

5. Graficamos el $\triangle$ABC y trazamos las alturas de los triángulos EBF y LFC y los denominamos a y b respectivamente; además $a + b = h$ ... (α)

Luego, como el cuadrilátero AEFL es un paralelogramos entonces: $\triangle EBF \sim \triangle LFC$



$\therefore \frac{EF}{LC} = \frac{a}{b} = k \Rightarrow EF = ak$
$LC = bk$

Calculamos las áreas de los triángulos EBF y LFC.

$S_1 = \frac{1}{2}(ak)a \quad \wedge \quad S_2 = \frac{1}{2}(bk)b$

$S_1 = a^2\frac{k}{2} \quad \wedge \quad S_2 = b^2\frac{k}{2}$

$a = \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{S_1} \quad \wedge \quad b = \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{S_2}$ ...(I)

Luego, en el triángulo ABC:

$S = \frac{1}{2}(ak + bk)h \quad (S = A_{\triangle ABC})$

$S = \frac{1}{2}k(a + b)h$

Reemplazando de (α):

$S = \frac{1}{2}kh^2$

$h = \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{S}$ ...(II)

Finalmente, reemplazamos (II) y (I) en (α):

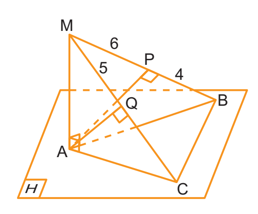
$h = a + b$

$\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{S} = \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{S_1} + \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{S_2}$

$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \Rightarrow \sqrt{S_{\triangle ABC}} = \sqrt{S_{\triangle EBF}} + \sqrt{S_{\triangle LFC}}$

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 58) Unidad 3

1.



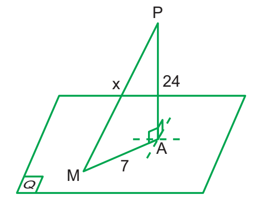
Por relaciones métricas:
En el ⊿MAB:
$(AM)^2 = (MB)(MP) \Rightarrow (AM)^2 = (10)(6)$ ...(1)

En el ⊿MAC:
$(AM)^2 = (MC)(MQ) \Rightarrow (AM)^2 = (5 + QC)(5)$ ...(2)

De (1) y (2):
$(10)(6) = (5 + QC)(5)$
$12 = 5 + QC$
$\therefore QC = 7$

Clave C

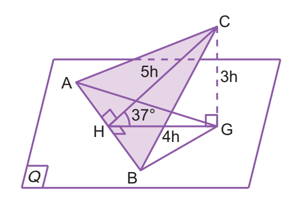
2.



En el ⊿PAM por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 7^2 + 24^2 = 625$
$\therefore x = 25$

Clave E

3.



Por el teorema de las tres perpendiculares:
$\overline{CH} \perp \overline{AB}$

Sea: $CH = 5h$

Por dato: $A_{\triangle ABC} = 30$

Entonces:
$\dfrac{(AB)(5h)}{2} = 30 \Rightarrow (AB)(h) = 12$

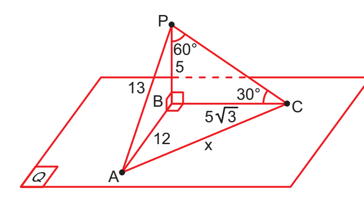
Piden:
$A_{\triangle AGB} = \dfrac{(AB)(4h)}{2} = 2(AB)(h)$

$\Rightarrow A_{\triangle AGB} = 2(12)$

$\therefore A_{\triangle AGB} = 24$

Clave E

4.



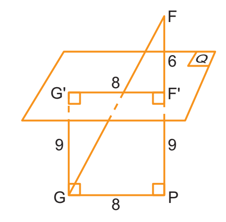
Del ⊿CBP notable de 30° y 60°: $BP = 5$

En el ⊿PBA por el teorema de Pitágoras:
$BA = 12$

En el ⊿ABC por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 12^2 + (5\sqrt{3})^2 = 144 + 75$
$\Rightarrow x^2 = 219$
$\therefore x = \sqrt{219}$

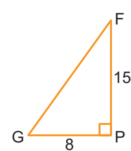
Clave D

5.



Se forma el ⊿GPF.

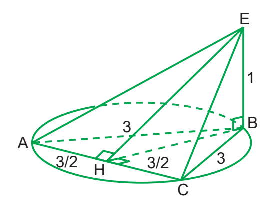
Por Pitágoras:



$(FG)^2 = (GP)^2 + (PF)^2$
$(FG)^2 = (8)^2 + (15)^2$
$(FG)^2 = 289$
$\therefore FG = 17$ cm

Clave E

6.



Por dato el $\triangle ABC$ es equilátero y el diámetro de la circunferencia mide $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ el radio: $R = \sqrt{3}$
Por polígonos regulares:
$AC = R\sqrt{3} = (\sqrt{3})\sqrt{3} = 3 \Rightarrow AC = 3$
En el ⊿BHC (30° y 60°): $BH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
Por el teorema de las 3 perpendiculares:
$\overline{EH} \perp \overline{AC}$

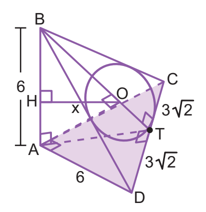
Por Pitágoras: $(EH)^2 = (EB)^2 + (BH)^2$
$(EH)^2 = (1)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow EH = \dfrac{\sqrt{31}}{2}$

Piden el área del $\triangle AEC$:
$A_{\triangle AEC} = \dfrac{(AC)(EH)}{2} = \dfrac{(3)\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)}{2} = \dfrac{3\sqrt{31}}{4}$

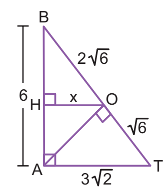
$\therefore A_{\triangle AEC} = \dfrac{3\sqrt{31}}{4}$ cm^2

Clave E

7. Por dato: $AB = AC = AD = 6$



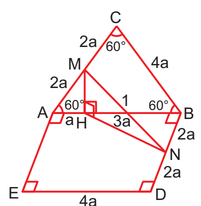
El triángulo DBC resulta equilátero:
$BD = BC = DC = 6\sqrt{2}$
En el ⊿ATD: $AT = 3\sqrt{2}$



Por relaciones métricas en el ⊿BAT:
$BO = 2\sqrt{6} \ \wedge \ OT = \sqrt{6}$
El ⊿BHO ∼ ⊿BAT
$\dfrac{x}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm

Clave D

8. Por dato: $MN = 1$



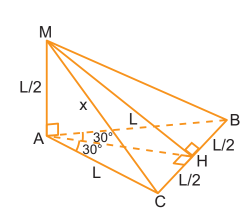
Sea: $AC = 4a \Rightarrow AM = MC = 2a \wedge BN = ND = 2a$
El ⊿AHM: notable de 30° y 60° $\Rightarrow MH = a\sqrt{3}$
En el ⊿NBH por Pitágoras:
$NH = \sqrt{13}\,a$
En el ⊿MHN por Pitágoras:
$(MH)^2 + (HN)^2 = 1^2$
$(a\sqrt{3})^2 + (\sqrt{13}\,a)^2 = 1$
$16a^2 = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$

Piden: $AC = 4a = 4\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1$

$\therefore AC = 1$ cm

Clave B

9. Por dato: AC = AB = BC = L $\wedge$ 2AM = L



$\measuredangle$AHC notable de 30° y 60° $\Rightarrow AH = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Por Pitágoras en el $\measuredangle$MAH:

$(MA)^2 + (AH)^2 = (MH)^2$

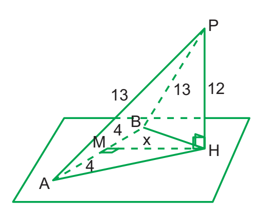
$\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (MH)^2 \Rightarrow MH = L$

Piden el área del $\triangle$BMC:

$A_{\triangle BMC} = \dfrac{(MH)(BC)}{2} = \dfrac{(L)(L)}{2} = \dfrac{L^2}{2}$

Clave A

10.



En el $\measuredangle$AHP, por Pitágoras:

$(AP)^2 = (AH)^2 + (PH)^2$

$13^2 = (AH)^2 + 12^2$

$25 = (AH)^2 \Rightarrow AH = 5$

En el $\measuredangle$AMH por Pitágoras:

$(AM)^2 + (MH)^2 = (AH)^2$

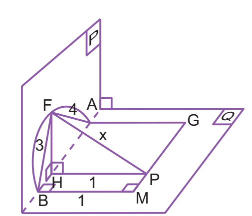
$4^2 + x^2 = 5^2$

$x^2 = 9$

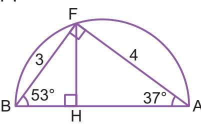
$\therefore x = 3$ cm

Clave C

11.



En el plano P:



El $\measuredangle$AFB notable de 37° y 53°

$\Rightarrow FH = \dfrac{12}{5}$

Por el teorema de las 3 perpendiculares:

$\overline{FP} = \overline{MG}$

En el $\measuredangle$FHP, por Pitágoras:

$(FP)^2 = (FH)^2 + (HP)^2$

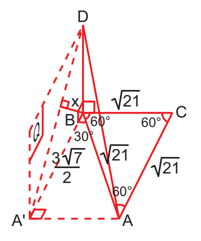
$x^2 = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 + (1)^2$

$x^2 = \dfrac{169}{25} \Rightarrow x = \dfrac{13}{5}$

$\therefore x = 2,6$

Clave A

12. Por dato: AB = BD = $\sqrt{21}$



Escogemos el plano Q de modo que:

La proyección de $\overline{BC}$ es B.

La proyección de $\overline{DA}$ es $\overline{DA'}$.

Entonces la mínima distancia entre $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ será la misma entre $\overline{DA'}$ y B.

En el $\measuredangle$BA'A de 30° y 60°:

$A'B = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

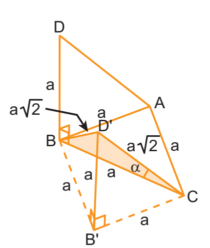
Por relaciones métricas en el $\measuredangle$DBA':

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(\sqrt{21})^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2}$

$\therefore x = 3$ cm

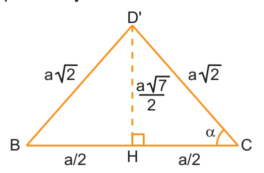
Clave B

13.



Trazamos una paralela a $\overline{DA}$ que pase por C.

El ángulo formado por $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ es el mismo formado por $\overline{D'C}$ y $\overline{BC}$.



Por Pitágoras:

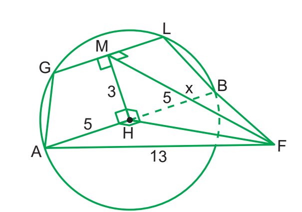
$D'H = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\tan\alpha = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{7}}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{7} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{7}$

Clave B

14.



En el $\measuredangle$AHF, por Pitágoras:

$(AH)^2 + (HF)^2 = (AF)^2$

$5^2 + (HF)^2 = 13^2$

$HF^2 = 144$

$HF = 12$

En el $\measuredangle$MHF, por Pitágoras:

$(MH)^2 + (HF)^2 = (MF)^2$

$3^2 + 12^2 = x^2$

$153 = x^2$

$\therefore x = 3\sqrt{17}$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 60) Unidad 3

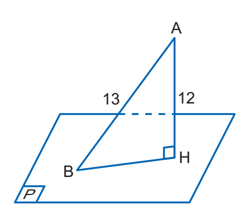
Comunicación matemática

1.

2.
- I. (F) porque está incluido en varios planos.
- II. (F) porque un punto pertenece al plano.
- III. (F) porque pertenece tanto como para una como para todas las rectas.
- IV. (F) porque por una recta pasan infinitos planos y por definición de planos se necesitan dos rectas.

Razonamiento y demostración

3.



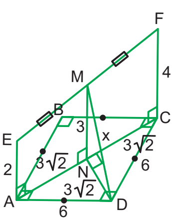
$\overline{BC}$: Proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano P.

Por el teorema de Pitágoras:

$(BC)^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow BC = 5$

Clave A

4.





Por propiedad:
$AN = NC = ND = 3\sqrt{2}$

En el trapecio AEFC:

$MN = \dfrac{2+4}{2} = 3$

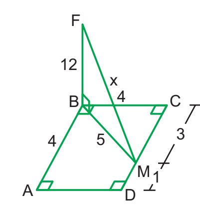
En el ⊿ MND:

$x^2 = (3)^2 + (3\sqrt{2})^2$

$x = 3\sqrt{3}$

Clave E

5.



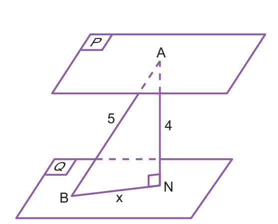
En el ⊿ BCM:
$BM = 5$

En el ⊿ FBM:
$x^2 = 12^2 + 5^2$
$x = 13$

Clave E

Resolución de problemas

6.



Del gráfico:

$\overline{NB}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano Q.

Por dato: $AN = 4 \wedge AB = 5$

Piden: $BN = x$

En el ◺ANB por el teorema de Pitágoras:

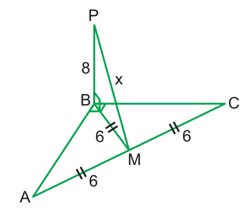
$x^2 + 4^2 = 5^2$

$x^2 = 9$

$\therefore x = 3$ m

Clave C

7.



Por propiedad:

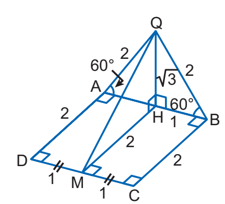
$BM = AM = MC = 6$

En el ⊿ PBM, por Pitágoras:

$x = 10$

Clave D

8.



En el $\triangle$AQB equilátero:

$QH = \sqrt{3}$

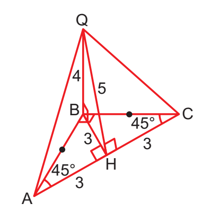
En el ⊿ QHM:

$(2)^2 + (\sqrt{3})^2 = (QM)^2$

$QM = \sqrt{7}$

Clave C

9.



Por el teorema de las 3 perpendiculares:

$\left.\begin{array}{l}\overline{QB} \perp \text{plano ABC} \\ \overline{BH} \perp \overline{AC}\end{array}\right\} \ \overline{QH} \perp \overline{AC}$

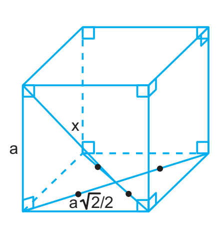
Por propiedad:
$BH = AH = HC = 3$
En el ⊿ QBH:
$QH = 5$

Por lo tanto:

$A_{\triangle AQC} = \dfrac{1}{2}(6)(5) = 15$

Clave B

10.



$x^2 = (a)^2 + (a\sqrt{2}/2)^2$

$x^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2}$

$x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Clave D

Nivel 2 (página 61) Unidad 3

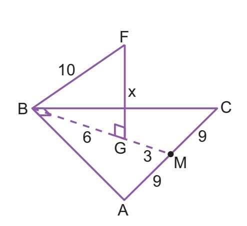
Comunicación matemática

11. I. (F) varía entre 0° y 360°.
II. (F) varía entre 180° y 540°.
III. (F) por 2 semiplanos.
IV. (F) porque es menor a la suma de las otras caras.

12. I. (F) porque si fueran paralelas.
II. (V) son colineales.
III. (F) porque por dos puntos pasan infinitos planos.
IV. (F) si fuesen colineales pasan infinitos planos.

Razonamiento y demostración

13.



Por propiedad:

$AM = MC = BM = 9$

G es baricentro:

$\Rightarrow BG = 6 \wedge GM = 3$

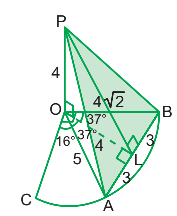
En el ⊿ BGF:

$x^2 = 10^2 - 6^2$

$x = 8$

Clave C

14.



Trazamos $\overline{OL} \perp \overline{AB}$
$\Rightarrow AL = LB = 3$

Por el teorema de las 3 perpendiculares:

$\left.\begin{array}{l}\overline{PO} \perp \text{Plano OCB} \\ \overline{OL} \perp \overline{AB}\end{array}\right\} \ \overline{PL} \perp \overline{AB}$

$m\angle AOL = 37° \Rightarrow OL = 4$

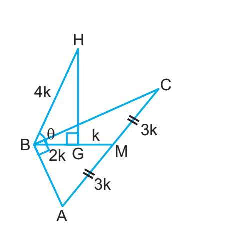
En el ⊿ POL isósceles: $PL = 4\sqrt{2}$

$\therefore A_{\triangle APB} = \dfrac{1}{2}(6)4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Clave A

Resolución de problemas

15.



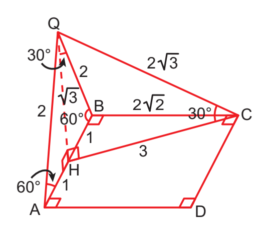
En el ⊿ BGH:

$BG = \dfrac{BH}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$

Clave A

16.

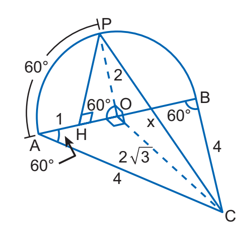




En el ⊿QHC:
$QH = \sqrt{3} \ \wedge \ HC = 3$
En el ⊿QHB:
$BH = 1$
En el ⊿HBC por Pitágoras:
$BC = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$
$\therefore A_{\square ABCD} = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Clave A

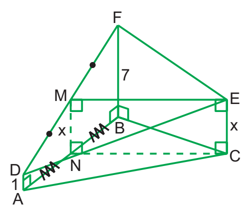
17.



Trazamos $\overline{CO}$, $CO = 2\sqrt{3}$
(O: centro de la semicircunferencia)
Teorema de las tres perpendiculares:
$\left.\begin{array}{l} \overline{PH} \perp \overline{ABC} \\ \overline{HO} \perp \overline{OC} \end{array}\right\} \overline{PO} \perp \overline{OC}$
$AO = OB = PO = 2$
⊿POC: teorema de Pitágoras
$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 \Rightarrow x = 4$

Clave E

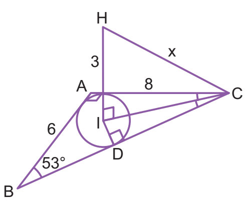
18.



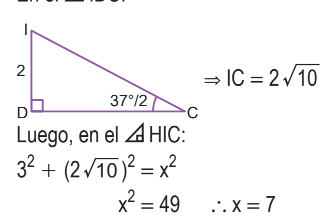
Por dato: $\overline{EM}$ // plano ABC
$\Rightarrow EC = MN$
En el trapecio ADFB:
$x = \dfrac{1+7}{2} = 4$

Clave E

19.



En el ⊿BAC, por el teorema de Poncelet:
$6 + 8 = 10 + 2r$
$r = 2$
En el ⊿IDC:



$\Rightarrow IC = 2\sqrt{10}$

Luego, en el ⊿HIC:
$3^2 + (2\sqrt{10})^2 = x^2$
$x^2 = 49 \quad \therefore x = 7$

Clave D

Nivel 3 (página 61) Unidad 3

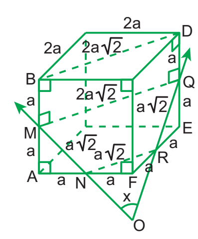
Comunicación matemática

20. I. (F) solo cuando la recta es perpendicular al plano.
II. (F) se proyecta como un punto.
III. (F) se puede proyectar como una recta a otro plano.
IV. (V) por definición de mínima distancia.

21. I. (V) puede coincidir.
II. (F) puede proyectarse también como un segmento.
III. (V) puede coincidir.
IV. (V)

Razonamiento y demostración

22.



Sea el lado del cubo 2a:
$\overline{BD}$ // $\overline{MQ} \Rightarrow MQ = 2a\sqrt{2}$
En el ⊿NFR:
$NR = a\sqrt{2}$

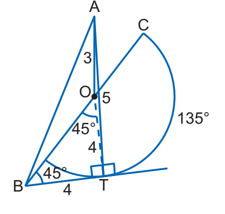
En el ΔMOQ:
$NR = \dfrac{MQ}{2} \Rightarrow \overline{NR}$ es base media

$\Rightarrow MN = NO = a\sqrt{2}$
$QR = RO = a\sqrt{2}$

En el ΔMOQ:
$MO = OQ = MQ$
$\therefore x = 60°$

Clave E

23.

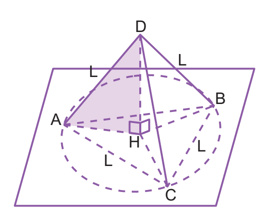


En el ⊿AOT:
$AT = 5$
Por el teorema de las 3 perpendiculares:
$\left.\begin{array}{l} \overline{AO} \perp \overline{BC} \\ \overline{OT} \perp \overline{BT} \end{array}\right\} \overline{AT} \perp \overline{BT}$
$\therefore A_{\Delta ATB} = \dfrac{4(5)}{2} = 10$

Clave E

24. Como el tetraedro es regular:
$AB = BC = AC = AD = CD = BD = L$

Demostraremos que H es el centro del ΔABC.

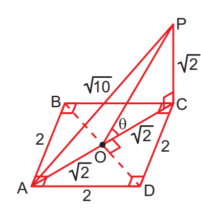


⊿AHD, ⊿CHD, ⊿BHD. Por tener igual hipotenusa (L) y el cateto común $\overline{DH}$.
HA = HB = HC (H es circuncentro del ΔABC)
$AH = \dfrac{AC}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$
En ⊿AHD: $DH^2 = AD^2 - AH^2$
$(DH)^2 = L^2 - \left(\dfrac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 \qquad \therefore DH = \dfrac{L}{3}\sqrt{6}$

Clave B

Resolución de problemas

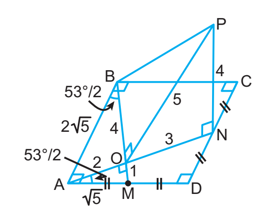
25.



En el ⊿PCA:
$PC^2 = (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2$
$PC = \sqrt{2}$
En el ⊿OCP, OC = CP
$\Rightarrow \theta = 45°$

Clave E

26.



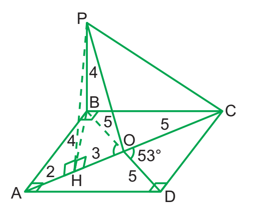
Por dato:
$5NP = 20$
$\Rightarrow NP = 4$
$4BM = 20$
$\Rightarrow BM = 5$
En el cuadrado ABCD por propiedad:
$m\angle AOM = 90°$
En el ⊿BAM notable de 53°/2:
$m\angle ABM = 53°/2 \Rightarrow AM = \sqrt{5} \ \wedge AB = 2\sqrt{5}$
En el ⊿BOA notable de 53°/2:
$BO = 4 \wedge AO = 2$
⊿BAM ≅ ⊿ADN (ALA)
$BM = AN \Rightarrow ON = 5 - 2 = 3$

Por el teorema de las 3 perpendiculares:
$\overline{PO} \perp \overline{BM}$

$\therefore A_{\Delta POB} = \dfrac{4(5)}{2} = 10$

Clave D

27.



Por el teorema de las 3 perpendiculares:

$\overline{PH} \perp \overline{AC}$

En el ⊿BHO notable de 37° y 53°:

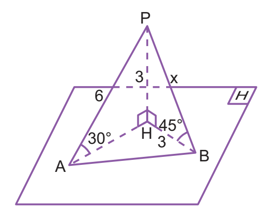
$BH = 4 \wedge HO = 3$

En el ⊿PBH: $PH = 4\sqrt{2}$

$\therefore A_{\Delta POC} = \dfrac{5(4\sqrt{2})}{2} = 10\sqrt{2}$

Clave B

28.



Trazamos $\overline{PH} \perp$ plano H.

En el ⊿PHA notable de 30° y 60°:

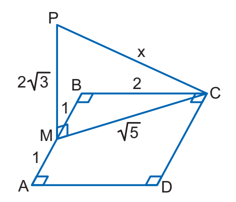
$PH = 3$

En el ⊿PHB notable de 45°:

$x = 3\sqrt{2}$

Clave B

29.



En el ⊿PMC:

$x = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2}$

$\therefore x = \sqrt{17}$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 63) Unidad 3

1. Por dato, en un poliedro:
n.° de vértices: V = 33

Las caras están formadas por:
8△ ; 9▱ ; m⬠
n.° de caras: C = 17 + m

También, n.° de aristas:

$$A = \frac{8\times 3 + 9\times 4 + m\times 5}{2}$$

$$A = \frac{24 + 36 + 5m}{2} = \frac{60 + 5m}{2}$$

Por el teorema de Euler:
$C + V = A + 2$

$$(17 + m) + 33 = \left(\frac{60 + 5m}{2}\right) + 2$$
$$100 + 2m = 64 + 5m$$
$$36 = 3m$$
$$\therefore m = 12$$

Clave D

2. Sea:
a: n.° caras de un dodecaedro regular.
b: n.° de vértices de un icosaedro regular.

$\Rightarrow a = 12 \wedge b = 12$
$\therefore\ a + b = 24$

Clave B

3. Sabemos: $S_{m\angle(caras)} = 360°(V - 2)$
Por dato: V = 20
$\Rightarrow S_{m\angle(caras)} = 360°(20 - 2) = 360° . 18$
$\therefore S_{m\angle(caras)} = 6480°$

Clave D

4. Sabemos:

$ND_P = C_2^V - A - \Sigma D_C$

En un icosaedro: V = 12; C = 20; A = 30

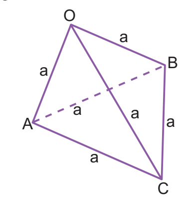
$$C_2^V = C_2^{12} = \frac{12!}{2!10!} = 66$$

El icosaedro tiene 20 caras las cuales son triángulos equiláteros.
$\Rightarrow \Sigma D_C = 0$

Entonces:
$ND_P = 66 - 30 - 0$
$\therefore ND_P = 36$

Clave C

5. Tetraedro regular O-ABC:



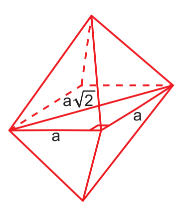
Por dato: a + a + a + a + a + a = 36
6a = 36
a = 6

Piden: $A_T = a^2\sqrt{3}$

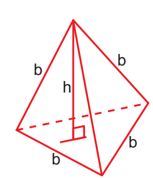
$\Rightarrow A_T = (6)^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$
$\therefore A_T = 36\sqrt{3}\ cm^2$

Clave D

6.



Diagonal del octaedro: d
$d = a\sqrt{2}$



Altura del tetraedro: h

$$h = \frac{b\sqrt{6}}{3}$$

Por dato: d = h

$$a\sqrt{2} = \frac{b\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ...(1)$$

Área total octaedro: $A_{T1} = 2\sqrt{3}\,a^2$
Área total tetraedro: $A_{T2} = \sqrt{3}\,b^2$

Piden:

$$\frac{A_{T1}}{A_{T2}} = \frac{2\sqrt{3}\,a^2}{\sqrt{3}\,b^2} = \frac{2a^2}{b^2} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad ...(2)$$

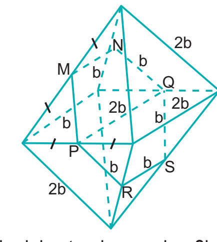
Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{A_{T1}}{A_{T2}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2\left(\frac{3}{9}\right) = \frac{2}{3}$$

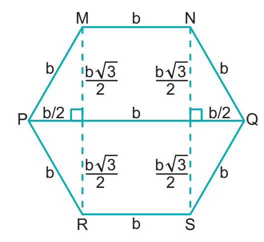
$$\therefore \frac{A_{T1}}{A_{T2}} = \frac{2}{3}$$

Clave A

7.



Sea el lado del octaedro regular: 2b



El área pedida será: 2(área trapecio PMNQ)

$$2\left[\frac{(b + 2b)}{2}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left(\frac{3b}{2}\right)\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\,b^2}{2} \quad ...(1)$$

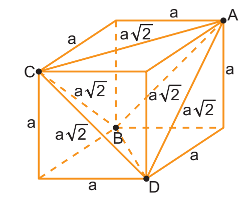
Por dato: $2b = a \Rightarrow b = \frac{a}{2}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{3\sqrt{3}\,b^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$$

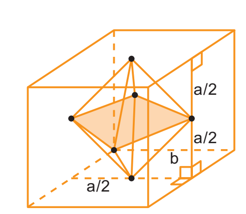
Clave D

8. Sea el tetraedro A-BCD



$A_{T1} = (a\sqrt{2})^2\sqrt{3}$
$A_{T1} = 2a^2\sqrt{3}$ ...(1)

Sea el lado del octaedro: b



$$\Rightarrow b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$A_{T2} = 2b^2\sqrt{3}$

$$A_{T2} = 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}$$

$A_{T2} = a^2\sqrt{3}$ ...(2)

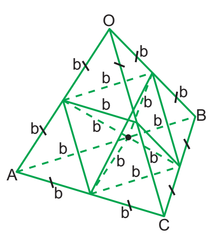
Dividiendo (1) ÷ (2), tenemos:

$$\frac{A_{T1}}{A_{T2}} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{a^2\sqrt{3}} = 2$$

$$\therefore \frac{A_{T1}}{A_{T2}} = 2$$

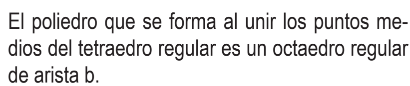
Clave D

9.



Por dato el área total del tetraedro:

$A_T = (2b)^2\sqrt{3}$
$\Rightarrow A_T = 4\sqrt{3}\,b^2$ ...(1)



El poliedro que se forma al unir los puntos medios del tetraedro regular es un octaedro regular de arista b.

Piden su área: $A = 2(b)^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,b^2$ ...(2)

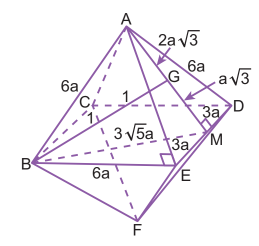
Dividiendo (2) y (1):

$$\frac{A}{A_T} = \frac{2\sqrt{3}\,b^2}{4\sqrt{3}\,b^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = \frac{A_T}{2}$$

Clave C

10. Sea el lado del octaedro regular: 6a



Por dato:

G: baricentro

En el $\triangle ABM$; por el teorema de Stewart:

$(6a)^2(a\sqrt{3}) + (3\sqrt{5}\,a)^2(2a\sqrt{3})$

$= (1)^2(3a\sqrt{3}) + (3a\sqrt{3})(a\sqrt{3})(2a\sqrt{3})$

$36\sqrt{3}\,a^3 + 90\sqrt{3}\,a^3 = 3\sqrt{3}\,a + 18\sqrt{3}\,a^3$

$108\sqrt{3}\,a^3 = 3\sqrt{3}\,a$

$36a^2 = 1$

$a = \frac{1}{6}$

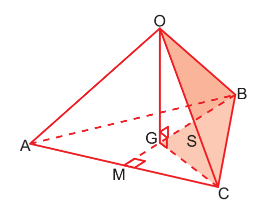
Entonces: $6a = 6\left(\frac{1}{6}\right) = 1$

Piden:

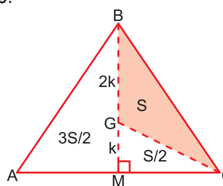
área total del octaedro $= 2(6a)^2\sqrt{3} = 2(1)^2\sqrt{3}$

$\therefore A_{Toctaedro} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

11. El área de la región triangular BGC es la proyección de la cara BOC. Además, $\overline{OG}$ es la altura del tetraedro, entonces G es el baricentro de la cara ABC.



En la base:



$$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{3S}{2} + \frac{3S}{2} = 3S$$

Como todas las caras son congruentes:

$\Rightarrow A_T = 4(A_{\triangle ABC})$

$A_T = 4(3S) = 12S$

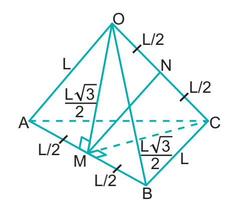
Por dato: $A_T = 600 \Rightarrow 600 = 12S$

$S = 50$

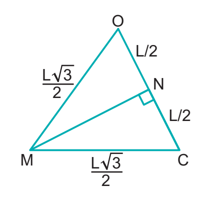
Por lo tanto, el área proyectada mide 50 m^2.

Clave C

12.



El $\triangle OMC$ resulta isósceles:



Entonces $\overline{MN}$ es mediana y altura.

Por Pitágoras:

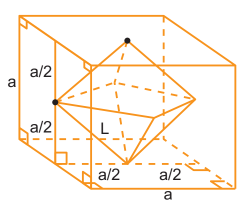
$$\left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right)^2 = (MN)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\frac{3L^2}{4} = (MN)^2 + \frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2L^2}{4} = (MN)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\,L}{2} = MN \Rightarrow L = MN\sqrt{2}$$

Clave C

13.



Las diagonales de cada cara de un hexaedro regular se cortan en un punto que coincide con el centro de cada cara.

El sólido formado es un octaedro regular de lado: L

Se cumple: $L = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Piden el volumen del octaedro:

$$V_{octaedro} = \frac{L^3\sqrt{2}}{3} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{6}$$

$$\therefore V_{octaedro} = \frac{a^3}{6}$$

Clave D

14. Sean a y b las aristas de dos hexaedros regulares.

Piden:

$$\frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \frac{6a^2}{6b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ ...(1)$$

Por dato: $b = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\therefore \frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 65) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

2. I. (F) en todo poliedro convexo se cumple el teorema de Euler.

II. (V) por definición.

III. (V) cumple la regla de poliedros convexos.

IV. (F) sería en un no convexo.

Razonamiento y demostración

3. La región sombreada es un triángulo equilátero:

$A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$

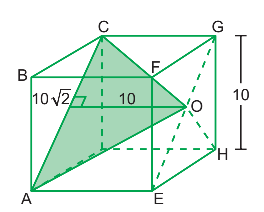
Clave A

4. $AB = 6$; $AE = 6\sqrt{2}$

$A_{\square AEFB} = (AB)(AE) = 36\sqrt{2}$

Clave B

5.



$$A_{\triangle ACO} = \frac{1}{2}(10\sqrt{2})(10) = 50\sqrt{2}\ m^2$$

Clave B

Resolución de problemas

6. Sea:

C: n.° de caras

V: n.° de vértices

A: n.° de aristas

Por dato:

$C + V + A = 32$ ...(1)

Por el teorema de Euler:

$C + V = A + 2$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$(A + 2) + A = 32$

$\Rightarrow 2A = 30$

$\therefore A = 15$

Clave D

7. $1^3 = k\sqrt{3}$

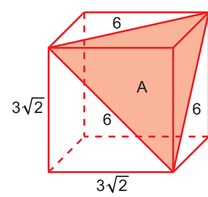
$1 = k\sqrt{3}$

$k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Clave B



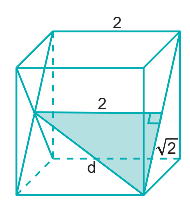
8.



$A=\frac{1}{4}(6)^2\sqrt{3}=9\sqrt{3}\ m^2$

Clave A

9.

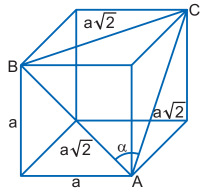


$d^2=(\sqrt{2})^2+(2)^2$

$d=\sqrt{6}$

Clave C

10.



Se observa que el triángulo formado ABC es equilátero.
Luego: $\alpha=60°$

Clave B

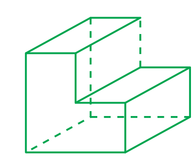
Nivel 2 (página 66) Unidad 3

Comunicación matemática

11. I. (F) no se cumple en los no convexos.
II. (F) solo se cumple para los poliedros regulares.
III. (F) no necesariamente.

Clave E

12. I. (V)
C = 8
V = 12
A = 18

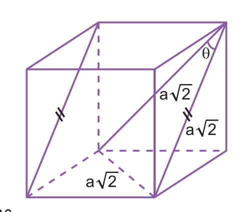


II. (F) el hexaedro de caras triangulares tiene una diagonal.
III. (V) por teoría.

Clave A

Razonamiento y demostración

13.



$\therefore \theta=60°$

Clave C

14. 1.^{er} paso: si solo analizamos el plano AFGD:
Si: AB = 6 ⇒ por Pitágoras

$AB^2+BF^2=AF^2$

$AF=6\sqrt{2}=GO$

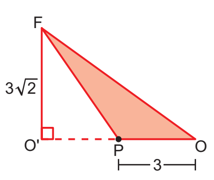
$AB=AD \Rightarrow AD=FG=6$

$GO=OD=\frac{GD}{2}$

$GO=3\sqrt{2}$

$GO=FO'$

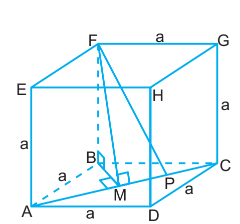
$FO'=3\sqrt{2}$



Si O es punto medio:

$PO=\frac{FG}{2} \Rightarrow PO=3$

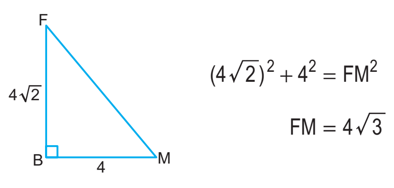
2.° paso:



$A_{\triangle FPO}=\frac{3\sqrt{2}\times 3}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

Clave D

15. 1.^{er} paso: trazar el segmento PM donde M es punto medio de AC y el segmento FM.



Sabemos:
AP = 6; PC = 2
Por Pitágoras:

$AB^2+BC^2=AC^2$

$a^2+a^2=8^2$

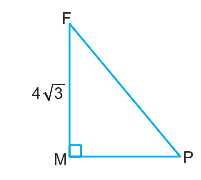
$AB=BC=a=4\sqrt{2} \Rightarrow a=4\sqrt{2}$

2.° paso:

$AM=MC=\frac{AC}{2}=\frac{8}{2} \Rightarrow AM=4;\ MC=4$

$BD=AC=2BM \Rightarrow BM=4$

Del triángulo pitagórico: FBM



$(4\sqrt{2})^2+4^2=FM^2$

$FM=4\sqrt{3}$

3.^{er} paso:

Del triángulo rectángulo FMP:

$MP=AC-AM-PC$

$MP=8-4-2=2$

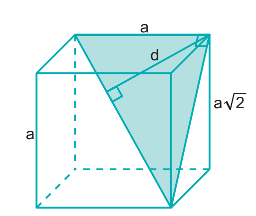
$\Rightarrow (4\sqrt{3})^2+2^2=FP^2$

$FP=2\sqrt{13}$

Clave C

Resolución de problemas

16.



$6a^2=24 \Rightarrow a=2$

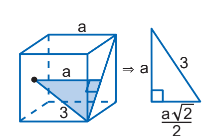
Luego:
Por relaciones métricas en el triángulo rectángulo:

$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}=\frac{3}{2a^2} \Rightarrow d=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

$\therefore d=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

Clave C

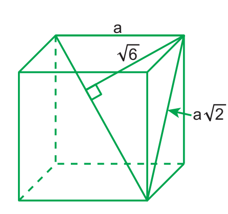
17.



$3^2=a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow a=\sqrt{6}\ m$

Clave C

18.

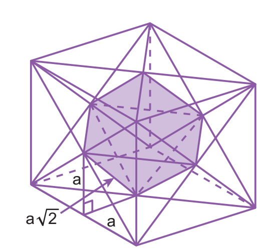


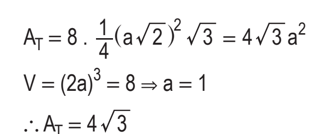
$\frac{1}{(\sqrt{6})^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a\sqrt{2})^2} \Rightarrow a=3$

$\therefore V=a^3=(3)^3=27\ m^3$

Clave C

19.





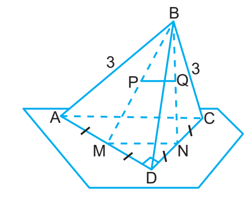
$A_T = 8 \cdot \frac{1}{4}(a\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,a^2$

$V = (2a)^3 = 8 \Rightarrow a = 1$

$\therefore A_T = 4\sqrt{3}$

Clave B

20.



- Sea ABCD el tetraedro.
- P baricentro de ABD
  Q baricentro de DBC
- $\triangle PBQ \sim \triangle MBN$:
  $\frac{PQ}{MN} = \frac{BP}{BM}$ ... (1)
- Siendo: $MN = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$ (en $\triangle ABC$) y
  $\frac{BP}{BM} = \frac{2}{3}$ (baricentro)
- En (1): $\frac{PQ}{3/2} = \frac{2}{3}$ $\therefore PQ = 1$

Clave D

Nivel 3 (página 67) Unidad 3

Comunicación matemática

21. I. (F) hay de 6 y de 8 aristas.

II. (F) los cinco poliedros regulares son conjugados.

III. (F) los poliedros regulares son convexos.

Clave C

22. I. (V) por definición.

II. (F) no necesariamente, tienen que ser varias rectas.

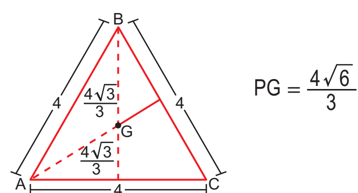
III. (V) cumple para todos los poliedros.

Clave C

Razonamiento y demostración

23. 1.^{er} paso: halla AG y PG:

En un tetraedro regular "G" es baricentro, entonces:



$PG = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Por Pitágoras: $AP = 4$ y $PG = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

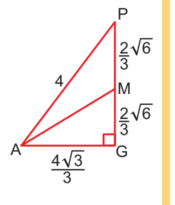
$AP^2 = AG^2 + PG^2$

$4^2 = AG^2 + \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$\Rightarrow AG = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

2.° paso: halla AM:
M es punto medio de $\overline{PG}$

$PG = 2PM \Rightarrow PM = \frac{2}{3}\sqrt{6}$



Por Pitágoras

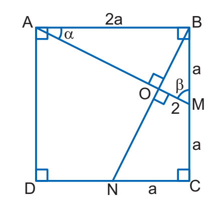
$AM^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2$

$AM^2 = \frac{72}{9} \Rightarrow AM = 2\sqrt{2}$

Clave D

24. Recuerda: bisecan divide al segmento en 2 partes iguales:

1.^{er} paso: halla la arista y el segmento AB



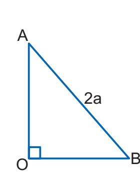
Por semejanza de triángulos:

$\triangle BOM \sim \triangle ABM \sim \triangle AOB$

$\frac{BO}{OM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AO}{BO}$

$\frac{BD}{2} = \frac{2a}{a} = \frac{AO}{BO}$

$\Rightarrow BO = 4;\ AO = 8$



Por Pitágoras:

$AO^2 + OB^2 = AB^2$

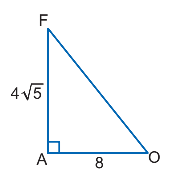
$8^2 + 4^2 = (2a)^2$

$\Rightarrow 2a = 4\sqrt{5}$

$a = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ arista $= 2a = 4\sqrt{5}$

2.° paso: halla FO:
$AB = FA = 4\sqrt{5}$



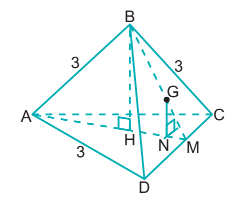
Por Pitágoras:

$FO^2 = (4\sqrt{5})^2 + 8^2$

$\therefore FO = 12$

Clave B

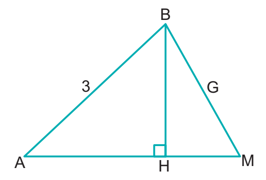
25. 1.^{er} paso:



Halla AM y BH:

Si G es baricentro $\Rightarrow$ M es punto medio.

H baricentro del $\triangle ABD$ y $\overline{BH} // \overline{GN}$ por deducción del tetraedro.



Por definición de tetraedro regular:

$AM = BM = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

H y G son baricentros entonces:

$AH = \frac{2}{3}AM$ y $GM = \frac{BM}{3}$

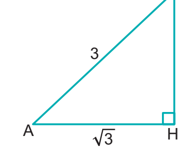
$AH = \sqrt{3}$ $\quad GM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por Pitágoras:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

$BH^2 = (\sqrt{6})^2$

$BH = \sqrt{6}$



2.° paso: halla GN siendo $\overline{GN}$ perpendicular al plano $\triangle ACD$.

Por semejanza:

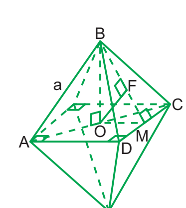
$\frac{BH}{GN} = \frac{BM}{GM}$

$\frac{\sqrt{6}}{GN} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow GN = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Clave C

Resolución de problemas

26. $OF = ?$



Las diagonales de un octaedro regular son congruentes.
(Esto es fácil demostrar).

$AO = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$OM = a/2$

En $\triangle MOB$: $\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OM)^2}$

$\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$\therefore OF = \frac{a\sqrt{6}}{6} = 1$

Clave C

27. La región sombreada es un hexágono regular, cuya arista es $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

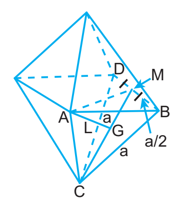
$$6 \times \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

Dato:

$$\frac{3}{4}a^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

Clave D

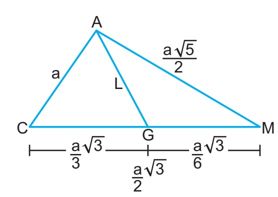
28.



Sea a la arista del octaedro.

- En $\triangle$AMB: $AM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
- Como el $\triangle$DBC es equilátero $\Rightarrow CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
- Como G es el baricentro del $\triangle$DBC.

  $\Rightarrow CG = \frac{a\sqrt{3}}{3} \wedge GM = \frac{a}{6}\sqrt{3}$
- Observa el triángulo MAC:



Aplicando el teorema de Stewart:

$$L^2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^2.\frac{a\sqrt{3}}{6} + a^2\frac{5}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

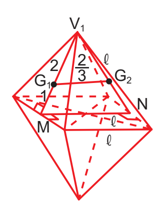
$$-\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = L$$

$\therefore$ El área A del octaedro: $A = 2a^2\sqrt{3} = 2L^2\sqrt{3}$

Clave D

29. Sean G_1 y G_2 los centros de gravedad de dos caras opuestas; se forma el triángulo V_1MN, observa que este triángulo con el triángulo $V_1G_1G_2$ son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\ell}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \ell = 1$$

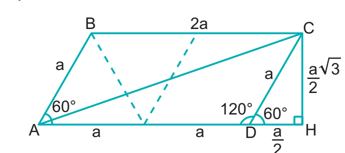


- El área del octaedro es:

  $A_8 = 8(1)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad \therefore A_8 = 2\sqrt{3}$

Clave B

30. 1.^{er} paso: halla la arista del tetraedro:

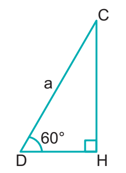


Sabemos:

$\angle BAD = 60°$

$\angle CDA = 120°$

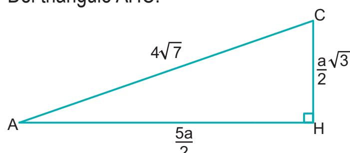
Del triángulo DHC:



$DH = \frac{a}{2}$

$CH = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Del triángulo AHC:



Sabemos:

$AC = 4\sqrt{7}$

$AH = \frac{5a}{2}$

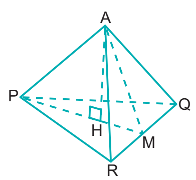
$CH = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Por Pitágoras:

$AC^2 = AH^2 + CH^2$

$a = 2$

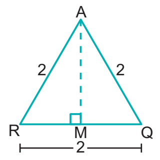
2.° paso: del tetraedro de arista = 2, hallamos su altura:



Piden AH = ?

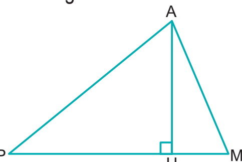
Sabemos: a = 2, PM = AM

Del triángulo ARQ



$\Rightarrow AM = \sqrt{3}$

Del triángulo PAM:

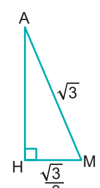


$PM = AM = \sqrt{3}$

$\frac{3PH}{2} = 3HM = PM = \sqrt{3}$

$PH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $HM = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Del triángulo AHM:



Por Pitágoras:

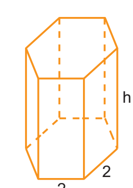
$AH^2 + HM^2 = AM^2$

$\therefore AH = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 68) Unidad 3

1. Por dato:



$A_{ST} = 3A_{SL}$

$A_{SL} + 2A_B = 3A_{SL}$

$\Rightarrow A_B = A_{SL}$

Entonces:

$6\left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6(2h) \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

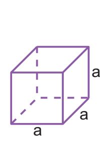
Piden: el volumen del prisma (V)

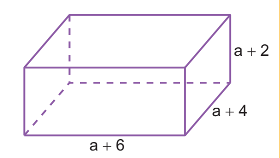
$V = (A_B)h = \left(6\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore V = 9\ m^3$

Clave A

2.





$(a + 6)(a + 4)(a + 2) - a^3 = 568$

$a^3 + 12a^2 + 44a + 48 - a^3 = 568$

$12a^2 + 44a - 520 = 0$

$3a^2 + 11a - 130 = 0$

$3a \quad\quad 26$

$a \quad\quad -5 \Rightarrow a = 5$

Piden: la diagonal del cubo (d)

$d = a\sqrt{3}$

$\therefore d = 5\sqrt{3}$

Clave D

3. Por dato: $A_{ST} = 144\ cm^2$

Entonces:

$A_{SL} + 2A_B = 144$

$4(4h) + 2(4^2) = 144$

$16h + 32 = 144$

$16h = 112 \Rightarrow h = 7$

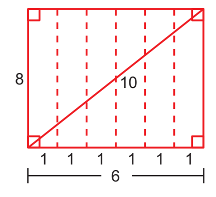
Piden: el volumen del prisma (V)

$V = A_B \times h$

$\therefore V = 4^2 \times 7 \Rightarrow V = 112\ cm^3$

Clave E

4.



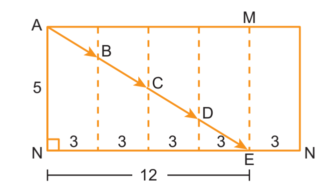
Piden: el volumen del prisma (V)

$V = A_B \times h \Rightarrow V = 6\left(\frac{1^2 \times \sqrt{3}}{4}\right) \times 8$

$\therefore V = 12\sqrt{3}$

Clave A

5. Por Pitágoras:



$B'C' = 26$

Por Poncelet:

$26 + 2r = 10 + 24$

$2r = 8 \Rightarrow r = 4$

Por dato:

$h = 2r$

$h = 2(4)$

$h = 8$

Piden el área lateral del prisma:

$A_L = (10 + 26 + 24)h = (60)(8) = 480\ cm^2$

Clave D

6. El desarrollo lateral del prisma será:

El menor recorrido será: AE

Por el teorema de Pitágoras:

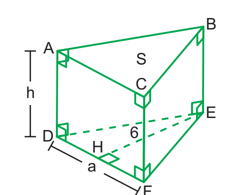
$(AE)^2 = (AN)^2 + (NE)^2$

$(AE)^2 = 5^2 + 12^2$

$(AE)^2 = 169 \Rightarrow AE = 13$

Clave B

7.



Piden el volumen del prisma: $V_{prisma} = S \times h$

Por dato: $A_{\square ACFD} = 20$

$a \times h = 20 \quad ...(1)$

Además del gráfico: $S = \frac{a \times 6}{2}$

$\Rightarrow S = 3a \quad ...(2)$

Multiplicando (1) y (2):

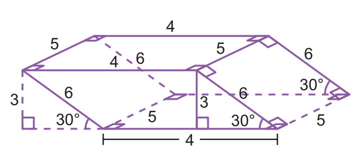
$\Rightarrow ah \times S = 20 \times 3a$

$S \times h = 60$

$V_{prisma} = 60\ m^3$

Clave C

8.



Piden área total del prisma (A_T):

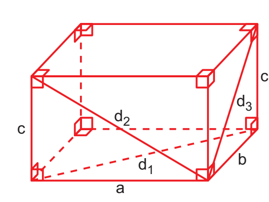
$A_T = 2(4 \times 3) + 2(5 \times 6) + 2(4 \times 5)$

$A_T = 24 + 60 + 40 = 124$

$\therefore A_T = 124\ m^2$

Clave A

9.



Por dato: $d_1 = \sqrt{117}$, $d_2 = \sqrt{106}$ y $d_3 = \sqrt{61}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = d_1^2 = (\sqrt{117})^2 = 117 \quad ...(1)$

$a^2 + c^2 = d_2^2 = (\sqrt{106})^2 = 106 \quad ...(2)$

$b^2 + c^2 = d_3^2 = (\sqrt{61})^2 = 61$

Tenemos:

$a^2 + b^2 = 117$ (+)

$a^2 + c^2 = 106$

$b^2 + c^2 = 61$

$2(a^2 + b^2 + c^2) = 284$

$a^2 + b^2 + c^2 = 142$

$117 + c^2 = 142$

$c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

Reemplazando en (2): $a^2 + 5^2 = 106$

$a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

Reemplazando en (1): $9^2 + b^2 = 117$

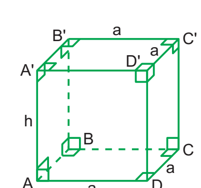
$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$

Piden: $V_{paralelepípedo} = a \times b \times c = 9 \times 6 \times 5 = 270$

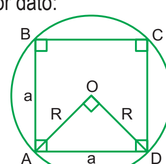
$\therefore V_{paralelepípedo} = 270\ cm^3$

Clave E

10.



En la base por dato:



$\Rightarrow R\sqrt{2} = a$

También la superficie lateral: $A_L = nR^2$

$A_L = 4(ah) = 4ah = nR^2$

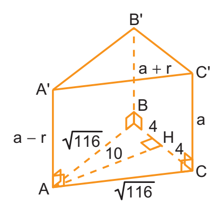
$\Rightarrow 4(R\sqrt{2})h = nR^2$

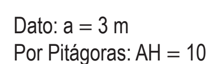
$h = \frac{nR}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{n\sqrt{2}R}{8}$

$\therefore h = \frac{n\sqrt{2}R}{8}$

Clave A

11.





Dato: a = 3 m

Por Pitágoras: AH = 10

Piden el volumen del tronco de prisma: $V_{Tprisma}$

$$V_{Tprisma} = A_{base} \times \frac{(AA' + BB' + CC')}{3}$$

$$V_{Tprisma} = \left(\frac{8 \cdot 10}{2}\right) \times \frac{(a - r + a + r + a)}{3}$$

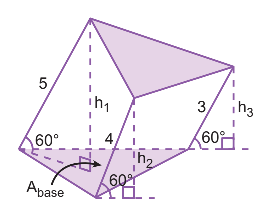
$$V_{Tprisma} = 40\left(\frac{3a}{3}\right)$$

$$V_{Tprisma} = 40 \times a = 40(3) = 120$$

$$\therefore V_{Tprisma} = 120 \text{ m}^3$$

Clave B

12.



Nos piden: volumen = V

Sabemos:

$$h_1 = \frac{5}{2}\sqrt{3}\ ;\ h_2 = 2\sqrt{3}\ \text{ y }\ h_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

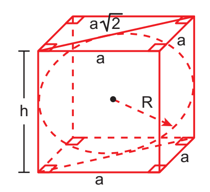
$$V = \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right) \times A_{base}$$

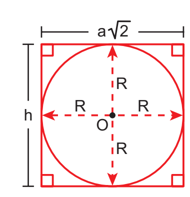
Dato: $A_{base} = 12$

$$\therefore V = 24\sqrt{3}$$

Clave A

13.





Del gráfico:

$h = 2R \ \wedge\ a\sqrt{2} = 2R$

$\Rightarrow a = \sqrt{2}\,R$

Piden: $V_{prisma} = A_{base} \times h$

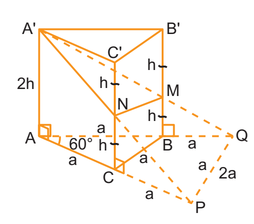
$$V_{prisma} = (a^2)(h) = a^2 \times h$$

$$V_{prisma} = (\sqrt{2}R)^2 \times (2R) = 2R^2 \times 2R = 4R^3$$

$$\therefore V_{prisma} = 4R^3$$

Clave E

14.



Por dato: $V_{ABC - A'B'C'} = 18 \text{ cm}^3$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times 2h = 18 \Rightarrow a^2h = 12\sqrt{3} \qquad ...(1)$$

Piden: V_{MBCNPQ}

$$V_{MBCNPQ} = V_{A' - APQ} - V_{A'MNABC}$$

$$\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2h}{3}\right) - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2h + h + h}{3}\right)$$

$$V_{MBCNPQ} = \frac{2\sqrt{3}\,a^2h}{3} - \frac{\sqrt{3}\,a^2h}{3} = \frac{\sqrt{3}\,a^2h}{3} \ ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$V_{MBCNPQ} = \frac{\sqrt{3}\,(12\sqrt{3})}{3} = \frac{12 \times 3}{3} = 12$$

$$\therefore V_{MBCNPQ} = 12 \text{ cm}^3$$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 70) Unidad 3

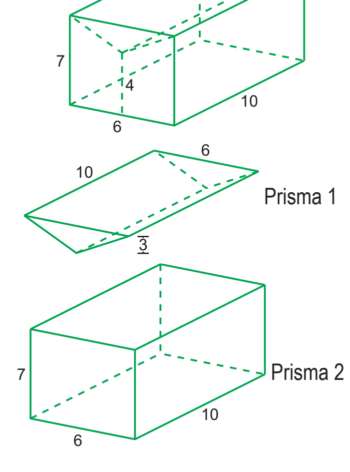
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. El sólido mostrado equivale a dos troncos de prisma.



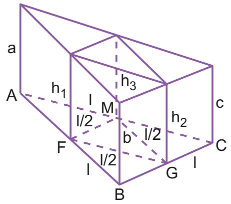
$\therefore$ El volumen:

$$V = V_{prisma2} - V_{prisma1}$$

$$V = 6 \times 7 \times 10 - \left(\frac{6 \times 3}{2}\right) \times 10 = 330$$

Clave E

4.



Analizando el mayor tronco de prisma. Área lateral:

$$A_{\ell 1} = \left(\frac{a + b}{2}\right)\ell + \left(\frac{b + c}{2}\right)\ell + \left(\frac{a + c}{2}\right)\ell$$

$$A_{\ell 1} = \ell(a + b + c) \qquad ...\ (1)$$

- En forma análoga, en el tronco de prisma menor:

  $A_{\ell 2} = \frac{\ell}{2} = (h_1 + h_2 + h_3) \quad ...\ (2)$

- Pero: $h_1 = \frac{a + b}{2}$; $h_2 = \frac{b + c}{2}$ y $h_3 = \frac{a + c}{2}$

  $\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = a + b + c$

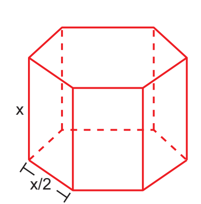
- Entonces de (1) y (2):

  $$\frac{A_{\ell 1}}{A_{\ell 2}} = \frac{\ell(a + b + c)}{\frac{\ell}{2}(a + b + c)} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1}$$

Clave B

Resolución de problemas

5.



Piden: el volumen (V) del prisma hexagonal regular.

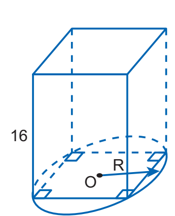
$$V = (A_B) \times h$$

$$\Rightarrow V = \left[\frac{6\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right](x) = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}\ .\ (x)$$

$$\therefore V = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^3$$

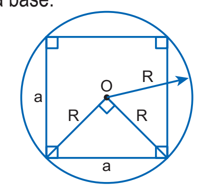
Clave B

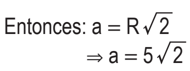
6.



Por dato: R = 5

Luego en la base:





Entonces: $a = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 5\sqrt{2}$

El área de la base será:

$A_B = a^2 = (5\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow A_B = 50\ cm^2$

Piden: el volumen del prisma (V).

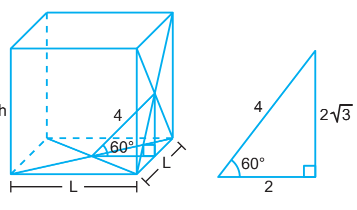
$V = (A_B) \times h$

$\Rightarrow V = (50)(16)$

$\therefore V = 800\ cm^3$

Clave E

7. Nos piden: V



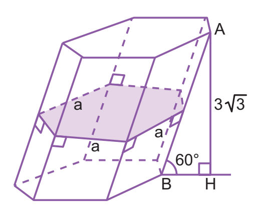
$\Rightarrow h = 4\sqrt{3} \quad \wedge \quad L = 4$

$V = 4 \times 4 \times 4\sqrt{3}$

$\therefore V = 64\sqrt{3}$

Clave B

8.



Nos piden: área lateral = A_{SL}

El ⊿AHB es notable de 30° y 60°:

$AH = 3\sqrt{3} \Rightarrow AB = 6$

Dato: $A_{SR} = 24\sqrt{3}$

$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

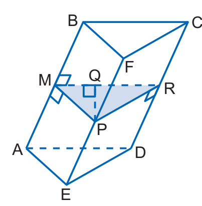
$a = 4$

$A_{SL} = 6 \times AB \times a$

$\therefore A_{SL} = 6 \times 6 \times 4 = 144$

Clave A

9.



Nos piden: $V_{prisma} = V = (A_{MPR}) \times (AB)$

Dato: $A_{ABCD} = 5\ cm^2 \Rightarrow (AB) \times (MR) = 5\ cm^2$

$PQ = 10\ cm$

$\Rightarrow V = \left(\dfrac{MR \times PQ}{2}\right) \times AB$

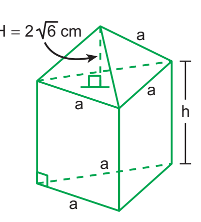
$V = \dfrac{1}{2}(AB \times MR) \times PQ$

Reemplazando:

$V = \dfrac{1}{2}(5)(10) \Rightarrow V = 25\ cm^3$

Clave E

10.



Nos piden: $V_{prisma} = A_{base} \times h$

Sabemos: $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow 2\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = 6\ cm$

Por dato:

Área lateral del prisma = Área total del tetraedro

$3ah = 4\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow h = 2\sqrt{3}\ cm$

$\therefore V_{prisma} = V = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{3} = 54\ cm^3$

Clave B

Nivel 2 (página 71) Unidad 3

Comunicación matemática

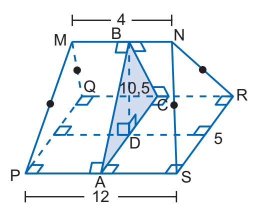
11.
I. (V) Un polígono siempre está inscrito en una línea curva.
II. (V)
III. (V) Por ser iguales.
IV. (F) No necesariamente.

Clave E

12.
I. (V) Pero serían también congruentes.
II. (F) Tiene que tener la misma forma poligonal.
III. (V)
IV. (V) Si son semejantes tienen la misma forma poligonal.

Razonamiento y demostración

13.



Datos:

PS = QR = 12 m; PQ = SR = 5 m; MN = 4 m y BD = 10,5 m.

Para calcular el volumen del sólido geométrico mostrado, se aplica la siguiente expresión:

$V = \text{Área}(\triangle ABC) \cdot \dfrac{(PS + QR + MN)}{3}$

Donde el área de la sección recta es:

$\text{Área}(\triangle ABC) = \dfrac{(5)(10,5)}{2}$

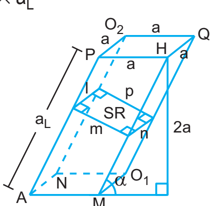
$\text{Área}(\triangle ABC) = \dfrac{105}{4}\ m^2$

Reemplazando: $V = \dfrac{105}{4}\left(\dfrac{12 + 12 + 4}{3}\right)$

$\therefore\ V = 245\ m^3$

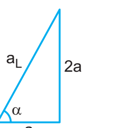
Clave C

14. $A_{SL} = P_{SR} \times a_L$



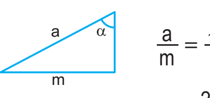
A_{SL}: área de la sección lateral

P_{SR}: perímetro de la sección recta



$a_L = \sqrt{5}\,a$

$L = n = a$



$\dfrac{a}{m} = \dfrac{\sqrt{5}\,a}{2a}$

$m = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Pero: $m = p = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

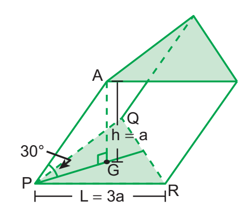
$\therefore A_{SL} = (m + n + p + L)a_L = \left(2a + \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}\right)\sqrt{5}a$

$A_{SL} = 2a^2\,(\sqrt{5} + 2)$

Clave D

Resolución de problemas

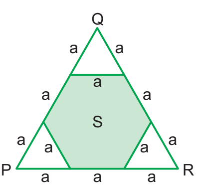
15.

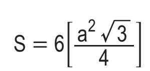


Nos piden: volumen del prisma hexagonal de base regular inscrito en el prisma triangular.

Sea L = 3a

La base del prisma hexagonal inscrito será:





$S = 6\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right]$

$\Rightarrow S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

El volumen pedido será:

$V = S \times h$

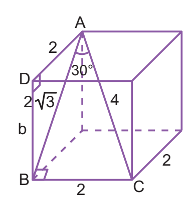
$V = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \times a$

$V = \frac{3}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^2\sqrt{3} \times \left(\frac{L}{3}\right)$

$\therefore V = \frac{L^3\sqrt{3}}{18}$

Clave A

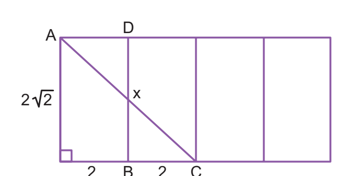
16.



Por Pitágoras en el ⊿ADB:

$2^2 + b^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$ cm

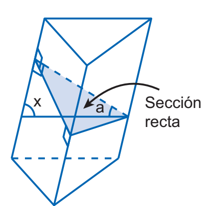
Nos piden: x



Por Pitágoras: $x = 2\sqrt{6}$ cm

Clave C

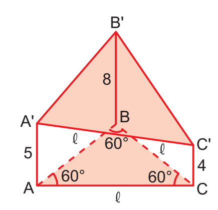
17. Nos piden: x



$x = 90° - a$

Clave C

18.



Nos piden: A_{base}

Sabemos:

$V_{A'B'C'-B} = \left(\frac{17}{3}\right)\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{9}{3}\right)\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{8}{12}\ell^2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

$\ell = 3\sqrt{2}$ cm

Luego:

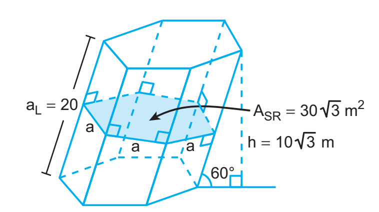
$A_{base} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{base} = \frac{(3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore A_{base} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm^2

Clave E

19.



Nos piden: $A_{lateral} = (2p_{SR})a_L$

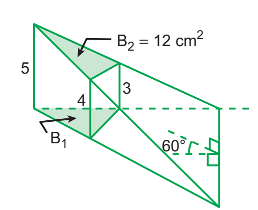
Del dato: $30\sqrt{3} = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow A_{lateral} = (6 \times 2\sqrt{5}) \times 20 = 240\sqrt{5}$ m^2

Clave E

20.



Nos piden: volumen = V

$B_1 = B_2 \times \cos 60°$

$B_1 = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$B_1 = 6\sqrt{3}$ cm^2

Luego:

$V = B_1\left(\frac{3+4+5}{3}\right)$

$\therefore V = 24\sqrt{3}$ m^3

Clave A

Nivel 3 (página 72) Unidad 3

Comunicación matemática

21. I. (V) Por congruencia.
II. (V) Por congruencia.
III. (F) Tiene que tener la misma forma poligonal en la base.
IV. (F) Las bases no necesariamente son iguales.

Clave A

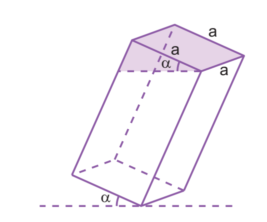
22. I. (V) Condición necesaria para que sean semejantes.
II. (F) La sección recta es mayor al área de la base.
III. (F) No necesariamente.
IV. (F) La arista lateral es mayor a la altura.

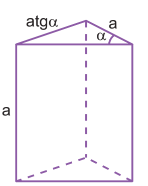
Clave D

Razonamiento y demostración

23. $V_{prisma} = 2a \times a^2 = 2a^3$

Volumen del líquido derramado (V_{PLD})





$V_{PLD} = A \cdot h$

$V_{PLD} = \frac{a.a.\tan\alpha}{2}$

$V_{PLD} = \frac{a^3}{2}\tan\alpha$

$\Rightarrow V_{PLD} = \frac{a^3}{2}\tan\alpha = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)2a^3$

$\tan\alpha = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow (2-\sqrt{3}) \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

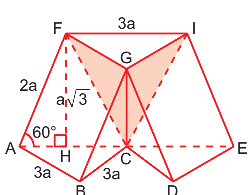
$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha° = 15°$

(Triángulo: 75°, 15°, catetos 1 y $2+\sqrt{3}$, hipotenusa $\sqrt{6}+\sqrt{2}$)

Clave D

24.



Los sólidos no comunes son los troncos de prisma iguales:

ABCFG y CDEIG cuyo volumen es V_x, entonces:

$V_x = V_{prisma}$ (ABCFGI) $- V_{pirámide}$ (C-FGI)

$\Rightarrow V_x = $ Área(ΔABC) $\times (a\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \times$ Área (ΔFGI)$(a\sqrt{3})$

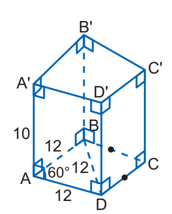
$V_x = 9a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \times a\sqrt{3} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(9a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(a\sqrt{3})$

$\therefore V_x = 4{,}5\ a^3$

Clave B

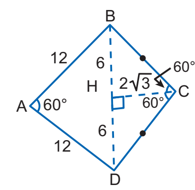
Resolución de problemas

25.



Por dato: ABCD es un cuadrilátero inscriptible, el $\triangle ABD$ es equilátero y el $\triangle BCD$ es isósceles.

En la base:



$$A_{\triangle ABD} = \frac{(12)^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

$$A_{\triangle BCD} = \frac{(12)(2\sqrt{3})}{2} = 12\sqrt{3}$$

Luego:

$A_{base} = A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BCD} = 36\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$

$\Rightarrow A_{base} = 48\sqrt{3}$

Piden: el volumen del prisma (V).

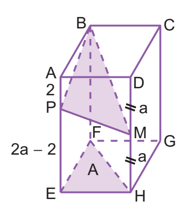
$V = (A_{base}) \times h$

$V = (48\sqrt{3})(10) = 480\sqrt{3}$

$\therefore V = 480\sqrt{3}\ cm^3$

Clave C

26.



Nos piden: $PE = 2a - 2$

Dato: $V_{PBM-EFH} = \frac{2}{5} V_{ABCD-EFGH}$

Reemplazando:

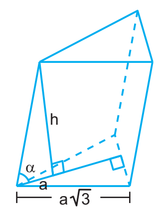
$$\left(\frac{2a - 2 + a + 2a}{3}\right) \times A = \frac{2}{5}(2A)(2a)$$

De donde: $a = 10$

$\therefore PE = 2a - 2 = 18$

Clave C

27.



Nos piden: volumen = V

$\tan\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\tan\alpha$

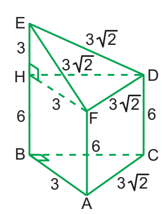
$$V = \frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \times h$$

$$V = \frac{a^2 \times 3 \times \sqrt{3}}{4}\, a\tan\alpha$$

$$\therefore V = \frac{3}{4}a^3\sqrt{3}\,\tan\alpha$$

Clave C

28.



Nos piden: $V_{ABC-FED} = V$

$\triangle FED$ equilátero:

$\Rightarrow EF = FD = ED = 3\sqrt{2}$

⊿ABC isósceles:

$AB = BC = 3$

$FH = BE \Rightarrow BH = AF = 6;\ FH = AB = 3$

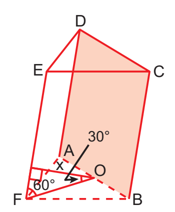
Luego:

$$V = \left(\frac{EB + AF + CD}{3}\right) \times A_{base}$$

$$V = \left(\frac{9 + 6 + 6}{3}\right)\frac{9}{2} \Rightarrow V = 31{,}5$$

Clave C

29.



Nos piden: x

Por dato:

$A_{\square ABCD} = 5$

$(AB)(4) = 5$

$AB = \frac{5}{4}$

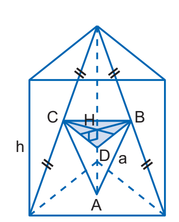
Del dato: $\frac{AB \times FO}{2} = 12 = A_{\triangle ABF}$

$\Rightarrow FO = \frac{96}{5}$

$$\therefore x = \frac{96}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{48\sqrt{3}}{5}$$

Clave E

30.



Nos piden: $V_{prisma} = V$

Dato: $4\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 9\sqrt{3} \Rightarrow a = 3$

$\overline{AH}$: altura del tetraedro

$$AH = \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = 2AH = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore V = 9\sqrt{3}\left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 54\sqrt{2}\ m^3$$

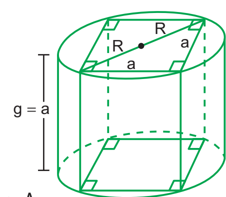
Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 73) Unidad 3

1. Del gráfico:

$2R = a\sqrt{2}$

$R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Área total del cubo: A_1

$A_1 = 6a^2$ ...(1)

Área lateral del cilindro: A_2

$A_2 = 2\pi R \times g$

$\Rightarrow A_2 = 2\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right) \times a = \sqrt{2}\,\pi a^2$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2):

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{6a^2}{\sqrt{2}\,\pi a^2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi} \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi}$

Clave C

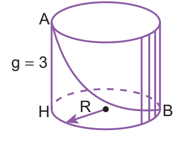
2. Por dato:

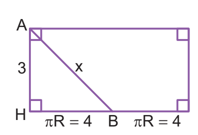
$A_L = 24$

$2\pi Rg = 24$

$2\pi R(3) = 24$

$\pi R = 4$





Entonces x es la mínima distancia para ir de A a B.

Por Pitágoras:

$x^2 = 3^2 + 4^2$

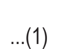
$\therefore x = 5$ m

Clave A

3. Por dato:

$A_T = 64$

$2\pi r(g + r) = 64$ ...(1)




Además:

$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{4}$

$r + g = \dfrac{rg}{4}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

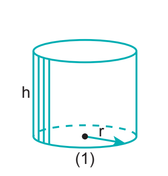
$2\pi r\left(\dfrac{rg}{4}\right) = 64 \Rightarrow \pi r^2 g = 128$

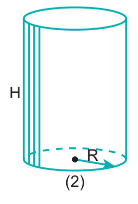
$V_{cilindro} = 128$

$\therefore V_{cilindro} = 128\ m^3$

Clave B

4.





Por dato: los cilindros son semejantes.

$\Rightarrow H = kh \wedge R = kr$ (k: constante de semejanza).

Además: $\dfrac{A_{SL_1}}{A_{SL_2}} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{2\pi rh}{2\pi RH} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{rh}{(kr)(kh)} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow k = \dfrac{3}{2}$

Luego: $V_1 = 16\pi$

$\Rightarrow \pi r^2 h = 16\pi \Rightarrow r^2 h = 16$

Piden:

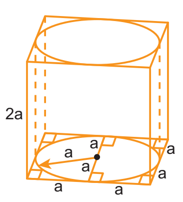
$V_2 = \pi R^2 H = \pi(kr)^2(kh)$

$\Rightarrow V_2 = \pi(r^2h)(k^3) = \pi(16)\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$

$\therefore V_2 = 54\pi$

Clave E

5.



$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h$

$V_{cilindro} = (\pi a)^2 \times 2a = 16\pi\ m^3$ (dato)

$\Rightarrow a = 2$

Piden: el volumen del cubo

$\Rightarrow V_{cubo} = (2a)^3 = (2 \times 2)^3 = 4^3$

$\therefore V_{cubo} = 64\ m^3$

Clave A

6. Por dato:

$h = 2R$

Además:

$A_T = 12\pi\ m^2$

$\Rightarrow 2\pi R(g + R) = 12\pi$

$2\pi R(2R + R) = 12\pi$

$2\pi R(3R) = 12\pi$

$6\pi R^2 = 12\pi$

$R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$

Piden: $V_{cilindro}$

$V_{cilindro} = \pi R^2(2R) = \pi(\sqrt{2})^2(2\sqrt{2})$

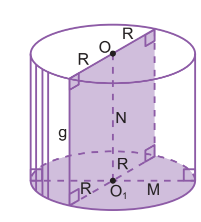
$= \pi(2)(2\sqrt{2})$

$= 4\sqrt{2}\ \pi$

$\therefore V_{cilindro} = 4\pi\sqrt{2}\ m^3$

Clave A

7.



$\overline{OO_1}$: eje del cilindro recto

Del gráfico: $2Rg = N \wedge \pi R^2 = M$

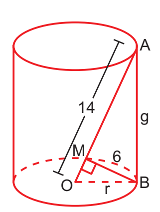
Nos piden: $V_{cilindro} = \pi R^2 \times g$

$V_{cilindro} = (M)\dfrac{N}{2R} = \dfrac{MN}{2\sqrt{\dfrac{M}{\pi}}} = \dfrac{\sqrt{\pi M} \times N}{2}$

$\therefore V_{cilindro} = \dfrac{N\sqrt{\pi M}}{2}$

Clave B

8.



Del gráfico:

Por relaciones métricas en el ⊿OBA:

$gr = 14 \times 6$

$gr = 84$

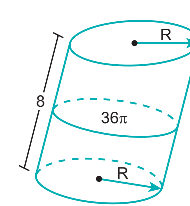
Nos piden el área lateral: A_L

$A_L = 2\pi rg = 2\pi(rg) = 2\pi(84) = 168\pi$

$\therefore A_L = 168\pi\ cm^2$

Clave E

9.



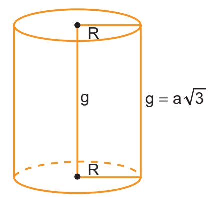
$A_{SR} = \pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = 6$

$A_{SL} = 2\pi Rg = 2\pi(6)(8) = 96\pi$

$A_{SL} = 96\pi\ m^2$

Clave B

10.



Dato:

$\dfrac{V_{cilindro}}{V_{cubo}} = \dfrac{\pi R^2 g}{a^3} = k \Rightarrow \dfrac{\pi R^2 a\sqrt{3}}{a^3} = k$

$\dfrac{\pi R^2\sqrt{3}}{k} = a^2$

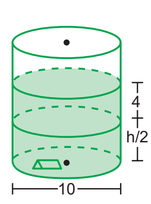
Piden:

$\dfrac{A_{Base}}{A_{cubo}} = \dfrac{\pi R^2}{6a^2} = \dfrac{k\pi R^2}{6\pi R^2\sqrt{3}}$

$\dfrac{A_{Base}}{A_{cubo}} = \dfrac{k\sqrt{3}}{18}$

Clave B

11.



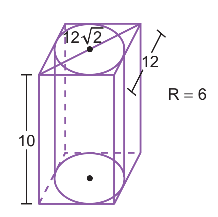
$\Rightarrow R = 5$

$\Delta V = \pi(R^2)h$

$\Delta V = \pi(5^2)(4) = 314\ cm^3$ (apróx.)

Clave D

12.

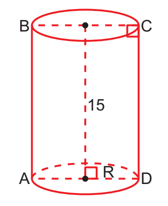


$V = \pi R^2 g = \pi(6)^2(10)$

$V = 360\pi\ m^3$

Clave E

13.



El área del desarrollo de la superficie lateral es:

$A_{SL} = 2\pi R \times h = 180\pi$

$A_{SL} = 2\pi(R)(15) = 180\pi$

$R = 6$

Luego:

$V = \pi R^2 \times g = \pi(6)^2(15)$

$V = 540\pi\ m^3$

Clave D

14. Dato:

$g = 2R$

$A_{SL} = 64\pi$

$2\pi Rg = 64\pi$

$R(2R) = 32$

$R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$

Luego:

$V = \pi R^2 g = \pi(4)^2(8)$

$V = 128\pi\ m^3$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 75) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

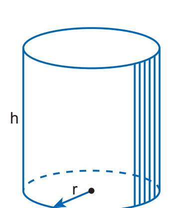
3. $\dfrac{2r \times SP}{\pi \times r^2 \times SP} = \dfrac{AD \times AB}{AD \times AB \times BF}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\pi \times r} = \dfrac{1}{BF}$

$\therefore \dfrac{BF}{r} = \dfrac{\pi}{2}$

Clave A

4.



Por dato: $V = A_{SL}$

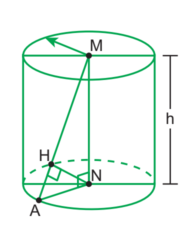
$A_{base} \times h = 2\pi \times r \times h$

$\pi \times r^2 = 2\pi \times r$

$\therefore r = 2$

Clave A

5.



Por relaciones métricas tenemos:

$(MN)(NA) = (NH)(AM)$

$h \times R = 12$

Luego:

$A_{SL} = 2\pi Rh = 2\pi(12) = 24\pi\ m^2$

Clave B

Resolución de problemas

6. $A_{SL} = 25$ y $h = 2R$

$A_{SL} = 2\pi Rg = 25$

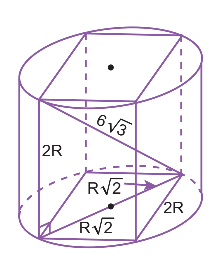
$4\pi R^2 = 25$

$R^2 = \dfrac{25}{4\pi} \Rightarrow R = \dfrac{5}{2\sqrt{\pi}}$

$h = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}\ m$

Clave C

7.



Por Pitágoras tenemos:

$(2R)^2 + (2R\sqrt{2})^2 = d^2$

$4R^2 + 8R^2 = d^2$

$d^2 = 12R^2$

$d = 2R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow R = 3$

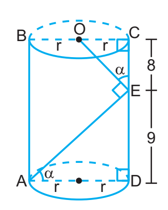
Luego:

$V = \pi r^2 h = \pi(R\sqrt{2})^2\, 2R$

$V = 4R^3\pi = 4(3)^3\pi = 108\pi\ m^3$

Clave E

8.



Por semejanza tenemos:

$\Delta OCE \sim \Delta EDA$

$\dfrac{r}{8} = \dfrac{9}{2r} \Rightarrow r = 6$

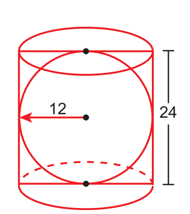
Luego:

$A_T = 2\pi r(g + r) = 2\pi(6)(17 + 6)$

$A_T = 276\pi\ cm^2$

Clave D

9.



Piden:

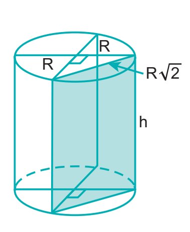
$A_{ST} = 2\pi r(g + r)$

$A_{ST} = 2\pi(12)(24 + 12)$

$A_{ST} = 864\pi\ m^2$

Clave B

10.



Dato: $R\sqrt{2} \times h = 2$

$hR = \sqrt{2}$

Luego:

$A_{SL} = 2\pi Rh = 2\pi(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi\ m^2$

Clave D

Nivel 2 (página 76) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

I. (F) es una recta.

II. (F) es una línea curva y cerrada.

III. (F) no tiene vértices.

IV. (V) sea convexo o no convexo.

Clave B

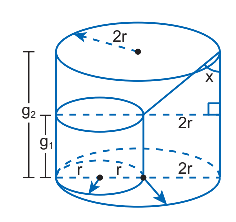
12.

I. (F) sus áreas de las bases son iguales.
II. (V) todo cilindro tiene sección axial.
III. (F) no se puede inscribir un cilindro recto.
IV. (V) por definición.

Clave D

Razonamiento y demostración

13.



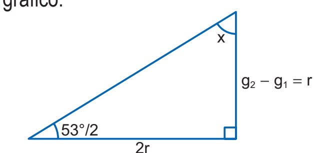
Por dato:

$2\pi(2r)g_2 = 2[2\pi r(g_1 + r)]$

$4\pi rg_2 = 4\pi r(g_1 + r)$

$g_2 = g_1 + r \Rightarrow g_2 - g_1 = r$

Del gráfico:

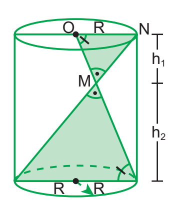


$\Rightarrow x + \frac{53°}{2} = 90°$

$\therefore x = 63°30'$

Clave C

14.



Por semejanza tenemos:

$\frac{2R}{h_2} = \frac{R}{h_1} \Rightarrow 2h_1 = h_2$

Dato: $A_{\triangle OMN} = 3$

$\frac{Rh_1}{2} = 3 \Rightarrow Rh_1 = 6$

Luego:

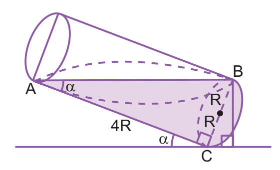
$A_{SL} = 2\pi R(h_1 + h_2)$

$A_{SL} = 2\pi R(3h_1) = 6\pi Rh_1$

$A_{SL} = 36\pi\ m^2$

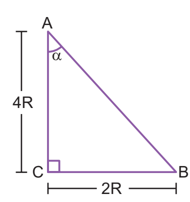
Clave D

15.



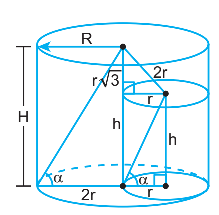
Luego se observa:

$\Rightarrow \alpha = \frac{53°}{2} = 26,5°$



Clave A

16.



$V_2 = \pi R^2 H$

$V_1 = \pi r^2 h$

Por semejanza tenemos:

$\frac{h + r\sqrt{3}}{2r} = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r\sqrt{3}$

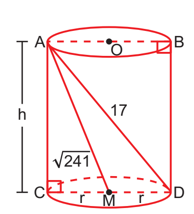
Piden:

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi \times (2r)^2 2r\sqrt{3}}{\pi \times r^2 \times r\sqrt{3}} = 8$

Clave C

Resolución de problemas

17.



Aplicando Pitágoras en:

$\triangle ACD: (17)^2 = (2r)^2 + h^2$
$\triangle ACM: (\sqrt{241})^2 = (r)^2 + h^2$ } (–)

$289 - 241 = 3r^2$

$3r^2 = 48$

$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$

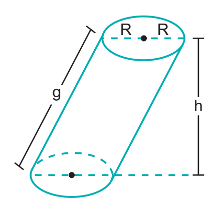
$h = 15$

$A_T = 2\pi r(g + r) = 2\pi(4)(15 + 4)$

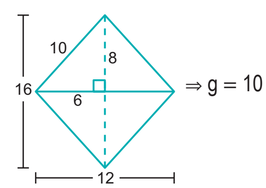
$A_T = 152\pi\ cm^2$

Clave C

18.



Desarrollo de la superficie lateral:



$\Rightarrow g = 10$

Dato:

$A_{SL} = 2\pi Rg = \frac{16 \times 12}{2}$

$Rg = \frac{48}{\pi} \Rightarrow R = \frac{48}{10\pi} = \frac{24}{5\pi}$

Luego:

$V = \pi R^2 g$

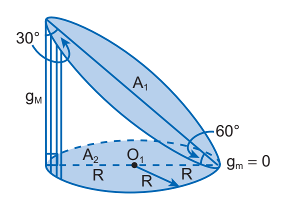
$V = \pi\left(\frac{24}{5\pi}\right)^2 \times 10$

$V = \frac{\pi(576) \times 10}{25\pi^2}$

$V = \frac{1152}{5\pi}\ cm^3$

Clave A

19.



Por propiedad, se cumple:

$A_2 = A_1\cos 60°$

$A_2 = A_1\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A_1 = 2A_2$

Por dato:

$A_1 + A_2 = S$

$(2A_2) + A_2 = S$

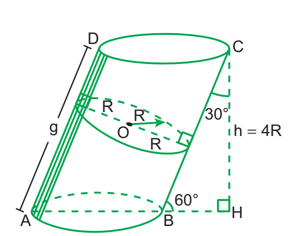
$3A_2 = S$

$3(\pi R^2) = S$

$\therefore R = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3\pi}}$

Clave C

20.



Del gráfico: AD = CB = g

Del $\triangle$CHB notable de 30° y 60°:

$CB = \frac{2\sqrt{3}}{3}(CH)$

$\Rightarrow g = \frac{2\sqrt{3}}{3}(4R) \Rightarrow g = \frac{8\sqrt{3}}{3}R$

Por dato: $R = 2\sqrt{3}$

Piden: el volumen del cilindro oblicuo

$V = (A_{SR}) \times g = \pi R^2 \times \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}R\right)$

$\Rightarrow V = \frac{8\sqrt{3}\pi R^3}{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi(2\sqrt{3})^3}{3} = 192\pi$

$\therefore V = 192\pi$

Clave B

Nivel 3 (página 77) Unidad 3

Comunicación matemática

21.

I. (F) pueden tener alturas diferentes.
II. (F) las bases también deben de ser semejantes.
III. (V) son iguales.
IV. (F) tiene superficie cilíndrica.

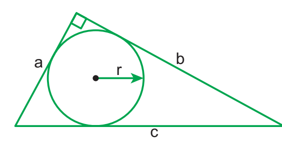
Clave C

22.

I. (F) solo los congruentes tienen áreas laterales iguales.
II. (V)
III. (F) un tronco de cilindro oblicuo solo se inscribe en otro cilindro oblicuo.
IV. (V)

Razonamiento y demostración

23.



h: altura del cilindro

Dato:

$ah + ch + bh - 2hc = 8$

$h = \dfrac{8}{a + b - c}$ ...(1)

Por propiedad tenemos:

$\dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{(a + b + c)r}{2}$

$r = \dfrac{ab}{a + b + c}$ ...(2)

Además:

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (a + b)^2 - c^2 = 2ab$ ...(3)

Luego, reemplazando (1), (2) y (3) en:

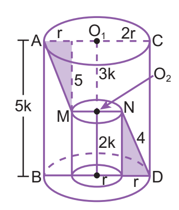
$A_{SL} = 2\pi \times r \times h$

$A_{SL} = 2\pi \times \dfrac{ab}{a + b + c} \times \dfrac{8}{a + b - c}$

$A_{SL} = \dfrac{16\pi ab}{2ab} = 8\pi$

Clave A

24.



Aplicando Pitágoras en los triángulos sombreados tenemos:

$(3k)^2 + r^2 = 25$
$(2k)^2 + r^2 = 16$ $(-)$
$9k^2 - 4k^2 = 9$
$k^2 = \dfrac{9}{5}$

Hallando r:

$4 \times \dfrac{9}{5} + r^2 = 16 \Rightarrow r^2 = \dfrac{44}{5}$

Piden volumen del cilindro de radio: V_r

$V_r = \pi r^2 \times h = \pi \times \dfrac{44}{5} \times 2 \times \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore V_r = \dfrac{264\pi\sqrt{5}}{25}$

Clave D

25. Por semejanza tenemos:

$\triangle OBM \sim \triangle NPM$

$\dfrac{2}{2k} = \dfrac{a}{3k} \Rightarrow a = 3$

$\triangle O_1PM \sim \triangle MBO$

$\dfrac{R}{2} = \dfrac{3}{R} \Rightarrow R^2 = 6$

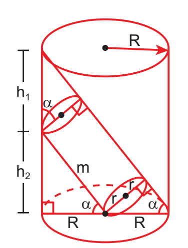
Luego:

$V = \pi R^2 h = \pi(6)(5)$

$V = 30\pi\ m^3$

Clave E

26.



Por semejanza tenemos:

$\dfrac{h_1 + h_2}{2R} = \dfrac{h_2}{R} \Rightarrow h_1 = h_2$

$\dfrac{m}{R} = \dfrac{h_1}{2r} \Rightarrow m = \dfrac{R \times h_1}{2r}$

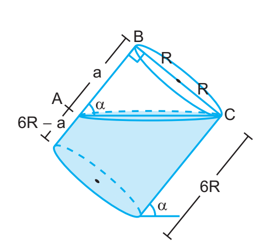
Piden la razón entre las áreas laterales:

$\dfrac{A_{SL_1}}{A_{SL_2}} = \dfrac{2\pi r \times m}{2\pi R(h_1 + h_2)} = \dfrac{r \times Rh_1}{2r} \times \dfrac{1}{R \times 2h_1}$

$\dfrac{A_{SL_1}}{A_{SL_2}} = \dfrac{1}{4}$

Clave C

27.



Del enunciado:

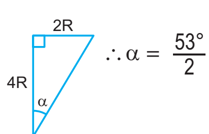
$V_{\text{tronco cilindro}} = \dfrac{2}{3} V_{\text{cilindro}}$

$\pi R^2 \left(\dfrac{g_M + g_m}{2}\right) = \dfrac{2}{3}\pi.R^2.6R$

$g_M + g_m = 8R$

$6R + 6R - a = 8R \Rightarrow a = 4R$

En el $\triangle ABC$:

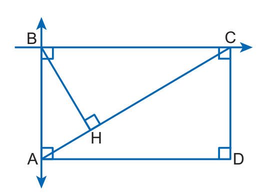


$\therefore \alpha = \dfrac{53°}{2}$

Clave B

Resolución de problemas

28.



Del gráfico:

Alrededor de $\overline{AB}$: $V_1 = \pi(BC)^2(AB)$

Alrededor de $\overline{BC}$: $V_2 = \pi(AB)^2(BC)$

En el $\triangle ABC$, por relaciones métricas sabemos:

$(AB)^2 = (AC)(AH)$

$(BC)^2 = (AC)(HC)$

Entonces:

$\dfrac{(BC)^2}{(AB)^2} = \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{25}{4}$

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{2}$

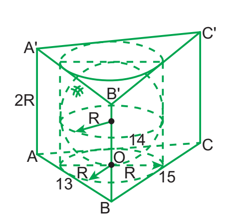
Luego:

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi(BC)^2 \times (AB)}{\pi(AB)^2 \times (BC)} = \dfrac{BC}{AB}$

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{2}$

Clave A

29.



Calculamos el área de la base:

Por la fórmula de Herón:

$p = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)}$

$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = 84$

También: $A_{\Delta ABC} = p\,.\,R$

$\Rightarrow 84 = (21)R \Rightarrow R = 4$

Piden: el volumen del prisma (V)

$V = (A_{base}) \times h$

$\Rightarrow V = (84)(2R) = (84)(2 \times 4)$

$\therefore V = 672$

Clave C

30. Por ser cilindros semejantes se cumple:

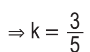
$\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{h_1}{h_2} = k$

Luego:

$\dfrac{A_{T1}}{A_{T2}} = \dfrac{2\pi R_1(h_1 + R_1)}{2\pi R_2(h_2 + R_2)} = \dfrac{18}{50}$

$= \dfrac{2\pi kR_2(kh_2 + kR_2)}{2\pi R_2(h_2 + R_2)} = \dfrac{18}{50}$

$= \dfrac{k^2[2\pi R_2(h_2 + R_2)]}{2\pi R_2(h_2 + R_2)} = \dfrac{18}{50}$



$\Rightarrow k = \frac{3}{5}$

Entonces:

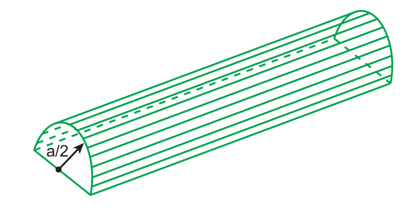
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 h_1}{\pi R_2^2 h_2} = \frac{R_2^2 \times k^2 \times k \times h_2}{R_2^2 \times h_2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

Clave A

MARATÓN MATEMÁTICA (página 78) Unidad 3

1.



Por dato:

- $a \times \ell = 9800\ m^2$
- $\frac{\ell}{a} = \frac{8}{1} \Rightarrow \ell = 8a$

$\Rightarrow a(8a) = 9800$

$a = 35$ m; $\ell = 280$ m

Paso 2:

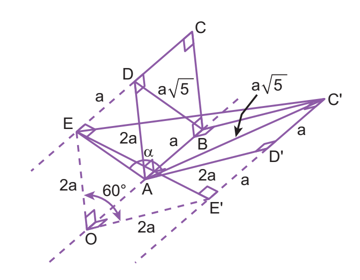
Hallando el área lateral:

$$A_L = \left(\frac{1}{2}\right)\left[2\pi\left(\frac{a}{2}\right)\right][\ell] = \frac{\pi \times 35 \times 280}{2}$$

$$= 4900\pi\ m^2$$

Clave D

2.



Paso 1:

$BD = AC' = a\sqrt{5}$

Se traslada $\overline{BD}$ al punto A de modo que el segmento EA es la proyección de $\overline{BD}$.

Se proyecta $\overline{DA}$ en $\overline{EG}$ y $\overline{AD'}$ en $\overline{GE'}$.

Paso 2:

El $\Delta EGE'$ es un triángulo equilátero

$\Rightarrow \overline{EE'} = 2a$

Paso 3:

En el $\Delta EE'C'$

Los segmentos $ED = E'D' = a$ porque AEDB y ABC'D' son paralelogramos.

Por Pitágoras $EC' = 2\sqrt{2}a$

Por ley de cosenos:

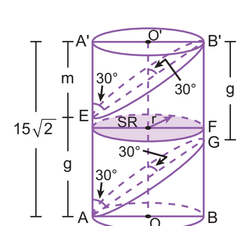
$EC'^2 = EA^2 + AC'^2 - 2(EA)(AC')\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{(a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{5})^2 - (2a\sqrt{2})^2}{2(a\sqrt{5})(a\sqrt{5})} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{5}\right)$$

Clave D

3.



Paso 1:

$O'B' = \sqrt{6} \Rightarrow A'B' = 2\sqrt{6}$

Por ser EA'B' un triángulo notable (30° y 60°):

$A'E = m = 6\sqrt{2}$

Paso 2:

$m + g = 15\sqrt{2} \Rightarrow G = 9\sqrt{2}$

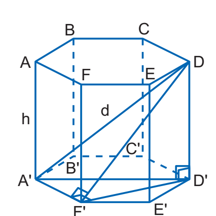
$\therefore A_{lateral} = 2\pi r\ .\ g$

$A_{lateral} = 2\pi(\sqrt{6})(9\sqrt{2})$

$= 36\pi\sqrt{3}$

Clave E

4.



Paso 1:

Por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overline{DF'} \perp \overline{A'F'}$

En el $\Delta A'F'D$; $A'F' = d\,\text{sen}\alpha$, $F'D = d\cos\alpha$

En el hexágono regular de lado A'F'

$\Rightarrow F'D' = \sqrt{3}\,A'F'$

Paso 2:

En el $\Delta F'D'D$

$$h = \sqrt{F'D^2 - F'D'^2} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - 3d^2\text{sen}^2\alpha}$$

$$h = d\sqrt{1 - 4\text{sen}^2\alpha}$$

Paso 3:

Área de la base:

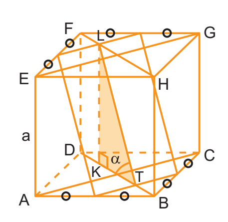
$$A_{base} = 6\left(A'F'^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3d^2\text{sen}^2\alpha\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ Volumen $= A_{base} \times h$

$$\text{Volumen} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,d^3\sqrt{1 - 4\text{sen}^2\alpha}\ \text{sen}^2\alpha$$

Clave A

5.



Paso 1:
Sea el cubo de arista "a";

$OB = a\sqrt{2} \Rightarrow KT = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Paso 2:
En el $\triangle LKT$;

$KL = a$ y $KT = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Por Pitágoras:

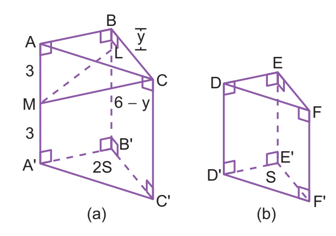
$LT^2 = Lk^2 + KT^2$

$LT = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{KT}{LT} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Clave B

6.



De los datos:

$V_{\text{tronco}}\, A'B'C' - MLC = V_{\text{prisma}}$ (b)

$2S\left(\dfrac{3+6-y+6}{3}\right) = S(EE')$

$\Rightarrow EE' = \dfrac{2}{3}(15-y)$ ...(α)

De los datos:

$$\frac{V_{\text{tronco}}\, ABCML}{V_{\text{tronco}}\, A'B'C' - MLC} = \frac{1}{3} = \frac{(2S)\left(\dfrac{3+y+0}{3}\right)}{(2S)\left(\dfrac{3+6-y+6}{3}\right)}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$

En (α): $EE' = \dfrac{2}{3}\left(15 - \dfrac{3}{2}\right) = 9$

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 81) Unidad 4

1. En un tronco de pirámide se tiene:

$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 . A_2})$

Reemplazando los datos del enunciado:

$74 = \frac{6}{3}(16 + A_2 + \sqrt{16 . A_2})$

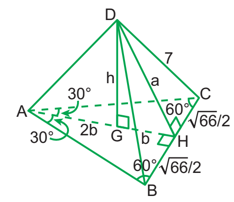
$37 = 16 + A_2 + 4\sqrt{A_2}$

$21 = \underbrace{A_2}_{9} + 4\underbrace{\sqrt{A_2}}_{3}$

$\therefore A_2 = 9 \text{ m}^2$

Clave D

2.



En el ⊿DHC por el teorema de Pitágoras:

$7^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{66}}{2}\right)^2$

$49 = a^2 + \frac{66}{4} \Rightarrow 49 - \frac{33}{2} = a^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{65}{2}}$

Del ⊿AHB notable de 30° y 60°:

$3b = \left(\frac{\sqrt{66}}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{22}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{22}}{2}$

En el ⊿DGH por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + h^2$

$\frac{65}{2} = \frac{22}{4} + h^2 \Rightarrow h^2 = 27 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

Piden el volumen de la pirámide D-ABC: V

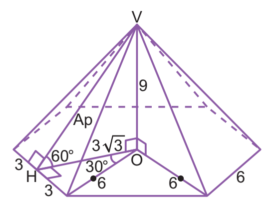
$V = \frac{1}{3}(A_B)h$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{(\sqrt{66})^2\sqrt{3}}{4}\right](3\sqrt{3}) = \frac{66.3.3}{3.4}$

$\therefore V = 49,5 \text{ m}^3$

Clave E

3.



En el ⊿HOV por el teorema de Pitágoras:

$(Ap)^2 = (3\sqrt{3})^2 + 9^2 = 108$

$\Rightarrow Ap = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

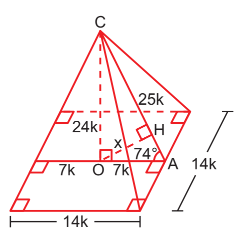
Piden: el área lateral de la pirámide

$A_L = p_{base} . Ap = 6(3) . 6\sqrt{3}$

$\therefore A_L = 108\sqrt{3} \text{ m}^2$

Clave B

4.



Por dato: $A_L = 6300 \text{ m}^2$

$\Rightarrow (p_{base})(Ap) = 6300$

$\left(\frac{56k}{2}\right)(25k) = 6300$

$700k^2 = 6300$

$k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

Por propiedad en el ⊿AOC:

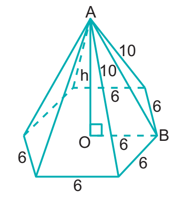
$24k . 7k = 25k . x$

$\frac{168k}{25} = x \Rightarrow x = \frac{168(3)}{25}$

$\therefore x = 20,16 \text{ m}$

Clave A

5.



En el ⊿AOB, por Pitágoras: AO = h = 8

Calculamos el área de la base: A_{Base}

$A_{Base} = \frac{3(6)^2\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$

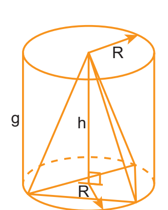
Piden el volumen: V

$V = \frac{1}{3}(A_{Base} \times h) = \frac{1}{3}(54\sqrt{3})(8) = 144\sqrt{3}$

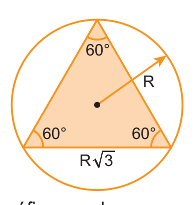
$\therefore V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Clave C

6.



En la base:



Además del gráfico: g = h

$V_{pirámide} = V_1$

$V_1 = \frac{1}{3}(A_{base})(h) = \frac{1}{3}\frac{(R\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot h$

$= \frac{\sqrt{3}R^2\cdot h}{4}$

Volumen del cilindro: V_2

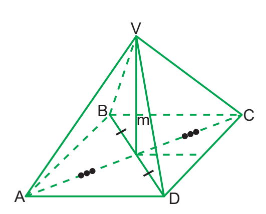
$V_2 = (A_{base})(h) = (\pi R^2)(h) = \pi R^2 h$

Nos piden:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}R^2 h}{4}}{\pi R^2 h} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

Clave E

7.



Empleando el teorema de la mediana en los triángulos AVC y BVD:

$2m^2 + \frac{(BD)^2}{2} = (VB)^2 + (VD)^2 \quad ...(1)$

$2m^2 + \frac{(AC)^2}{2} = (VA)^2 + (VC)^2 \quad ...(2)$

(2) – (1):

$\underbrace{(VA)^2 + (VC)^2 - (VB)^2 - (VD)^2}_{H} = \frac{(AC)^2}{2} - \frac{(BD)^2}{2}$

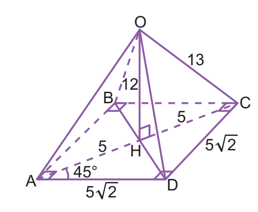
$\Rightarrow H = \frac{(AC)^2}{2} - \frac{(BD)^2}{2}$

Por dato: AC = 10 ∧ BD = 8

$\therefore H = \frac{10^2}{2} - \frac{8^2}{2} = 50 - 32 = 18$

Clave B

8.



En el ⊿OHC, por Pitágoras: HC = 5

$\Rightarrow AC = 10 \Rightarrow AD = 5\sqrt{2}$

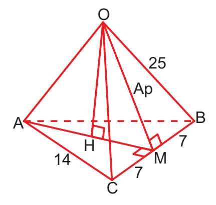
Piden el volumen: V

$V = \frac{1}{3}A_{base}\cdot h = \frac{1}{3}(5\sqrt{2})^2(12) = \frac{25\cdot 2\cdot 12}{3} = 200$

$\therefore V = 200 \text{ m}^3$

Clave A

9.





En el ⊿OMB, por Pitágoras: OM = 24
⇒ Ap = 24

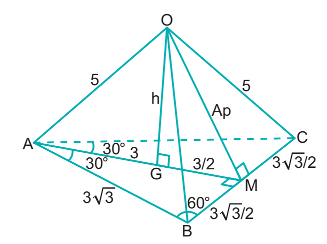
Piden el área de la superficie lateral: A_L

$A_L = (p_{base})(Ap) = \left(\frac{42}{2}\right)(24) = 504$

$\therefore A_L = 504\ m^2$

Clave D

10.



Como la pirámide es regular, entonces la altura cae en el baricentro de la base que es un triángulo equilátero.

Por Pitágoras: h = 4

Piden el volumen: V

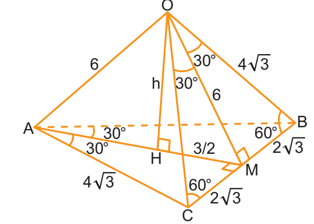
$V = \frac{1}{3}(A_{base})h = \frac{1}{3}\frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}(4) = \frac{9.3\sqrt{3}.4}{4.3}$

$= 9\sqrt{3}$

$\therefore V = 9\sqrt{3}\ m^3$

Clave E

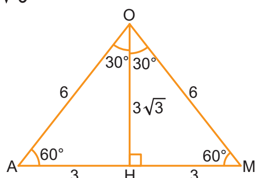
11.



Por ⊿ notable de 30° y 60°: OM = 6 ∧ AM = 6

Entonces el △OAM resulta equilátero.

$\Rightarrow h = 3\sqrt{3}$



Piden el volumen: V

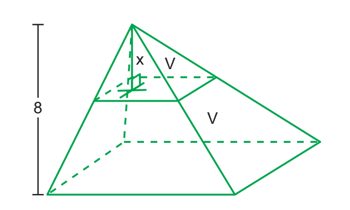
$V = \frac{1}{3}(A_{Base})h = \frac{1}{3}\frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{3})$

$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{48\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}{4} = 36$

$\therefore V = 36\ m^3$

Clave D

12.



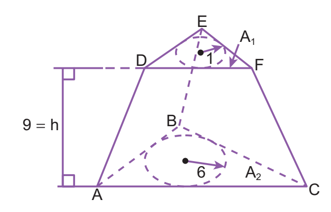
Por teorema se cumple:

$\frac{V}{2V} = \frac{x^3}{8^3} = \left(\frac{x}{8}\right)^3 \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

$\therefore x = 4\sqrt[3]{4}$

Clave E

13.



Por dato: $2p_1 = 24 \wedge 2p_2 = 36$

Sabemos:

$A_1 = p_1 . r_1 = \left(\frac{24}{2}\right)1 = 12$

$A_2 = p_2 . r_2 = \left(\frac{36}{2}\right)6 = 108$

Piden: el volumen del tronco de pirámide

$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 . A_2})$

$V = \frac{9}{3}[12 + 108 + \sqrt{12.108}]$

$V = 3[120 + 36]$

$\therefore V = 468\ m^3$

Clave B

14. Por semejanza de pirámides:

$\left(\frac{d}{h}\right)^3 = \frac{V}{2V} \Rightarrow d = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 83) Unidad 4

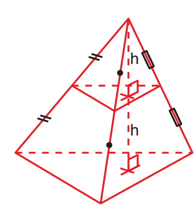
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3.



V_T: volumen del tronco.

V_P: volumen de la pirámide menor.

Por teorema se cumple:

$\frac{V_P}{V_P + V_T} = \frac{h^3}{(2h)^3} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow 8V_P = V_P + V_T \Rightarrow 7V_P = V_T$

$\therefore \frac{V_T}{V_P} = 7$

Clave C

4. Sea:

V_i: volumen inicial

V_a: volumen de agua añadido

Por semejanza de pirámides:

$\frac{V_i}{V_i + V_a} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$27V_i = 8V_i + 8V_a$

$V_a = \frac{19}{8}V_i$

Dato: $V_i = 16 \Rightarrow V_a = 38\ m^3$

Clave B

Resolución de problemas

5. Por dato:

$A_L = 64$; $Ap = 2a$ Arista básica: a

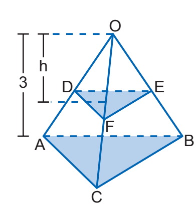
$\Rightarrow A_L = p . Ap$

$2a(2a) = 64$

$a = 4$

Clave D

6.



$V_1 = V_{O-DEF}$

$V_2 = V_{O-ABC}$

Por semejanza de pirámides:

$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h}{3}\right)^3$ ...(1)

Por dato:

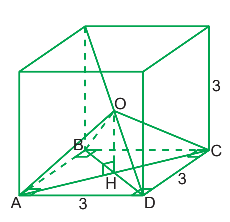
$\frac{V_1}{V_2 - V_1} = \frac{8}{19} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$ ...(2)

De (1) y (2):

$\left(\frac{h}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow h = 2$

Clave E

7.

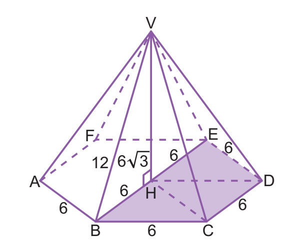


Del gráfico: $OH = \frac{3}{2}$

$\therefore V_{O-ABCD} = \frac{1}{3}(3^2)\left(\frac{3}{2}\right) = 4,5$

Clave D

8.

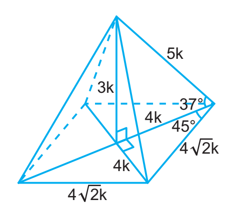


Por dato:
AB = 6
⇒ BH = HC = 6

En el ⊿VHB:
$VH = \sqrt{12^2 - 6^2}$
$VH = 6\sqrt{3}$
$V = \frac{1}{3}.3.\frac{1}{4}(6)^2\sqrt{3}\,(6\sqrt{3}) = 162\ cm^3$

Clave D

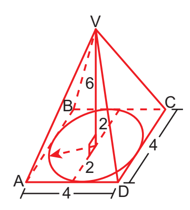
9.



Por dato:
V = 32
$\frac{1}{3}(4\sqrt{2}\,k)^2(3k) = 32$
k = 1
∴ h = 3k = 3

Clave D

10.



Por dato: r = 2
⇒ AD = DC = 4
∴ $V_{V-ABCD} = \frac{1}{3}(16)(6) = 32$

Clave C

Nivel 2 (página 84) Unidad 4

Comunicación matemática

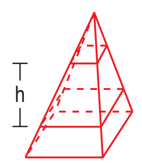
11.

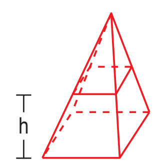
I. (F) no necesariamente.
II. (V) solo en el caso de que sean congruentes.
III. (V) cuando son congruentes.
IV. (F) los troncos de pirámide pueden tener alturas en diferentes proporciones, por lo tanto no son semejantes.

12.

I. (F) iguales.
II. (V) porque son congruentes (iguales).
III. (F) los troncos pueden estar en diferentes proporciones, por lo tanto no serían congruentes.

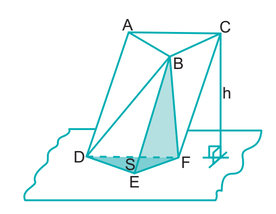
IV. (F)





Razonamiento y demostración

13.



Dato: $V_{B\text{-}DEF} = V = 10\ m^3$
Se pide:
$V_{B\text{-}ACFD} = V_x$
De la figura:
Volumen del prisma $= V_x + V$
$Sh = V_x + \frac{Sh}{3}$
$V_x = 2\left(\frac{Sh}{3}\right)$
$V_x = 2(10\ m^3)$
∴ $V_x = 20\ m^3$

Clave D

14. Sea:
A_1: área del piso de la 2.ª planta.
A_2: área del piso de la 1.ª planta.
Por semejanza de pirámides:

$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{6}{6+h}\right)^2$

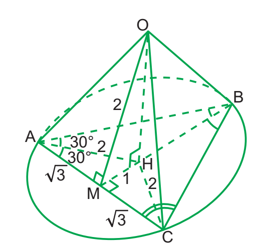
$\frac{27}{48} = \frac{36}{(6+h)^2}$

6 + h = 8
∴ h = 2

Clave B

Resolución de problemas

15.



Por dato:
$A_L = 2A_{base}$

$(3\sqrt{3})Ap = \frac{2(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$

Ap = 2

Por polígonos regulares:

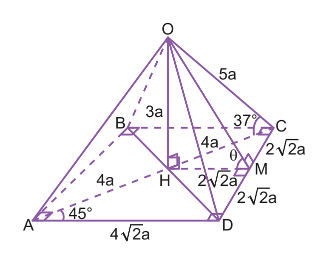
$AC = 2\sqrt{3} \wedge HM = 1$

En el ⊿OHM: $OH = \sqrt{3}$

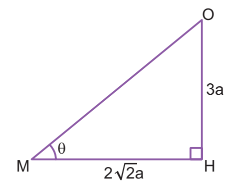
$\therefore V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 3\ cm^3$

Clave E

16.



En el ⊿OHM:



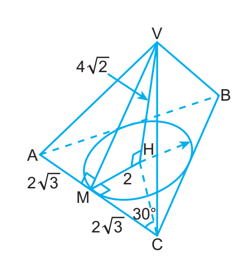
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{3a}{2\sqrt{2}a} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\tan\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \theta = \arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Clave C

17.



Por dato: $r = 2$

$\Rightarrow AM = MC = 2\sqrt{3}$

En el ⊿VHM:

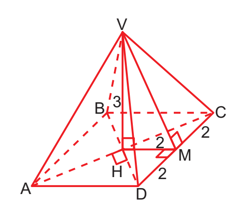
$VM = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2}$

$VM = 6$

$\therefore A_L = (6\sqrt{3})(6) = 36\sqrt{3}$

Clave B

18.



Por dato:

$A_{ABCD} = 16\ m^2 \Rightarrow AD = DC = 4$

En el ⊿VHM:

$VM = \sqrt{3^2 + 2^2}$

$VM = \sqrt{13}$

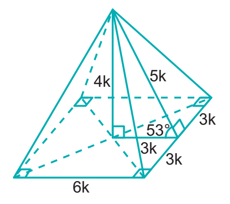
Por lo tanto:

$A_L = p_{base} \cdot Ap = (8)(\sqrt{13})$

$\therefore A_L = 8\sqrt{13}\ m^2$

Clave C

19.



Por dato:

$A_L = 60$

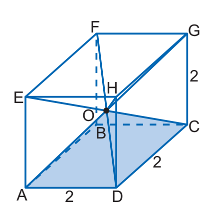
$(12k)(5k) = 60$

$k = 1$

$\therefore h = 4k = 4$

Clave D

20.



$V_{O-ABCD} = \frac{1}{3}(2^2)(1) = \frac{4}{3}$

Clave A

Nivel 3 (página 84) Unidad 4

Comunicación matemática

21.

I. (V) en un cono recto.

II. (V) en un cono irregular.

III. (F) son 4.

IV. (F) los oblicuos no cae la proyección en la base.

22.

I. (F) pirámide no convexa ⇒ base no convexa

II. (V) pirámide convexo ⇒ base convexa

III. (V) Por definición.

IV. (F) También es una pirámide irregular.

23.

I. (F) no necesariamente.

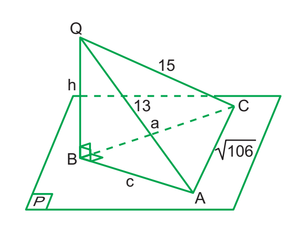
II. (F) revisar el enunciado IV, pregunta 12.

III. (F) pueden tener diferentes alturas.

IV. (F) tienen que tener volúmenes iguales.

Razonamiento y demostración

24.



Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 + c^2 = 106$ ...(1)

$h^2 + a^2 = 225$ ...(2)

$h^2 + c^2 = 169$ ...(3)

Sumando las tres expresiones tenemos:

$2(a^2 + c^2 + h^2) = 500$

$\Rightarrow a^2 + c^2 + h^2 = 250$ ...(4)

Reemplazando (1) en (4):

$\Rightarrow (106) + h^2 = 250$

$h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

De (2): $(12)^2 + a^2 = 225$

$a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

De (3): $(12)^2 + c^2 = 169$

$c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

Piden:

El volumen de la pirámide Q–ABC (V)

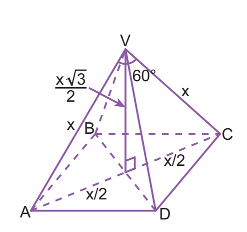
$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}\left(\frac{a.c}{2}\right)h$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{9.5}{2}\right)(12) = 90$

$\therefore V = 90\ m^3$

Clave E

25.



Por dato:

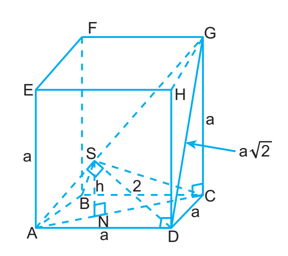
$V = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}A_{base} \times h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\therefore x = 2$

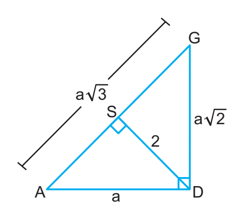
Clave D

Resolución de problemas

26.



En el ◺ADG, por relaciones métricas:



$(a)(a\sqrt{2}) = (a\sqrt{3})(2)$

$\Rightarrow a = \sqrt{6}$

$\frac{GS}{SA} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{(a)^2}$

$\frac{GS}{SA} = \frac{2}{1} \Rightarrow GS = 2k \wedge SA = k$

Luego: el ◺ACG ~ ◺ANS

$\frac{GA}{GC} = \frac{SA}{SN} \Rightarrow \frac{2k + k}{a} = \frac{k}{h}$

$\frac{3k}{a} = \frac{k}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{3}$

Piden:

El volumen de la pirámide S-ABCD (V)

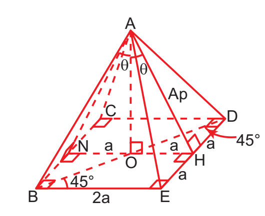
$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(a^2)\left(\frac{a}{3}\right)$

$V = \frac{a^3}{9} = \frac{(\sqrt{6})^3}{9} = \frac{6\sqrt{6}}{9}$

$\therefore V = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ m^3$

Clave A

27.



Del gráfico: el △NAH es isósceles.

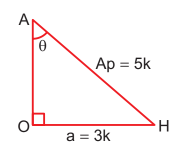
Por dato: $5A_B = 3A_L$

$5(2a)^2 = 3(4a)(Ap)$

$20a^2 = 12a(Ap)$

$\Rightarrow \frac{Ap}{a} = \frac{5}{3}$

Entonces:



El ◺AOH resulta ser notable de 37° y 53°.

$\Rightarrow \theta = 37°$

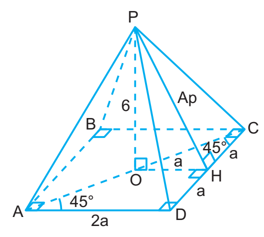
Piden: la $m\angle NAH$

$\Rightarrow m\angle NAH = 2\theta = 2(37°)$

$\therefore m\angle NAH = 74°$

Clave E

28.



Por dato: $A_{\square} = 2(A_{\triangle PCD})$

$$\Rightarrow (2a)^2 = 2\left(\frac{2a \cdot Ap}{2}\right)$$

$$4a^2 = 2a \cdot Ap$$

$$\Rightarrow Ap = 2a$$

En el ⊿POH por el teorema de Pitágoras:

$(Ap)^2 = a^2 + 6^2$

$(2a)^2 = a^2 + 36 \Rightarrow 3a^2 = 36 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

Piden: el volumen de la pirámide (V)

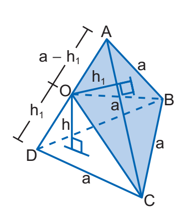
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(2a)^2(6)$$

$\Rightarrow V = 8a^2 = 8(2\sqrt{3})^2 = 96$

$\therefore V = 96\ m^3$

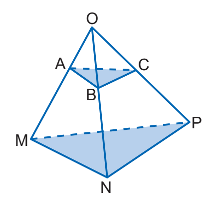
Clave C

29.



Piden: $OD = h_1$

Por propiedad:



$$\frac{V_{O-ABC}}{V_{O-MNP}} = \frac{OA(OB)(OC)}{OM(ON)(OP)}$$

En el problema:

$$\frac{V_{A-OBC}}{V_{A-DBC}} = \frac{(a-h_1)(a)(a)}{a(a)(a)}$$

$$\frac{\frac{A_{base}(h_1)}{3}}{\frac{A_{base}(H)}{3}} = \frac{a-h_1}{a}$$

$$\frac{h_1}{H} = \frac{a-h_1}{a} \qquad ...(1)$$

H: altura del tetraedro V_{A-DBC}

$$\Rightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{h_1}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a-h_1}{a}$$

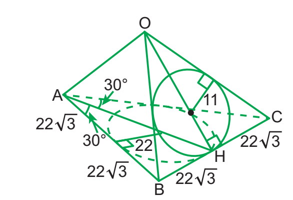
$$h_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$$

Racionalizando:

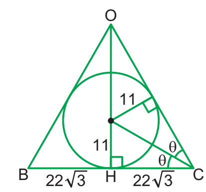
$h_1 = OD = a(\sqrt{6} - 2)$

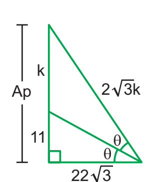
Clave A

30.



En el triángulo OBC:





Por Pitágoras:

$(2\sqrt{3}k)^2 = (k+11)^2 + (22\sqrt{3})^2$

$12k^2 = k^2 + 22k + 121 + 1452$

$0 = k^2 - 2k - 143$

k ⟶ –13
k ⟶ +11 } k = 13

$\Rightarrow A_p = k + 11 = 13 + 11 = 24$

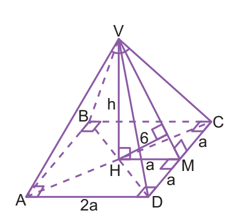
Piden: área lateral (A_L)

$A_L = (p_{base})(A_P) = (66\sqrt{3})(24) = 1584\sqrt{3}$

$\therefore A_L = 1584\sqrt{3}\ m^2$

Clave C

31.



Por dato:

$A_L = 300$

$\Rightarrow (4a)VM = 300$

$a(VM) = 75 \qquad ...(1)$

En el ⊿VHM por relaciones métricas:

$ah = (VM)6 \qquad ...(2)$

Multiplicando (1) y (2):

$a^2h(VM) = 75(6)(VM)$

$a^2h = 450$

Luego:

$$V = \frac{1}{3}(2a)^2h = \frac{4}{3}(a^2h)$$

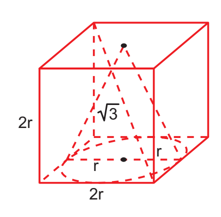
$$V = \frac{4}{3}(450)$$

$V = 600$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO
(página 86) Unidad 4

1.



Por dato: la diagonal del cubo mide $\sqrt{3}$ m.

$\Rightarrow d = \sqrt{3}$

$(2r)\sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

Piden:

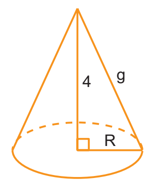
El volumen del cono (V)

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \,.\, h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \,.\, 2\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore V = \frac{\pi}{12}\ m^3$

Clave D

2.



$A_L = 3A_{base}$

$\pi Rg = 3\pi R^2$

$g = 3R$

$\Rightarrow g^2 = R^2 + 16$

$9R^2 = R^2 + 16$

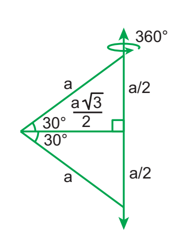
$8R^2 = 16$

$R^2 = 2$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(2)(4) = \frac{8\pi}{3}\ cm^3$

Clave B

3.



Se generan dos conos equivalentes:

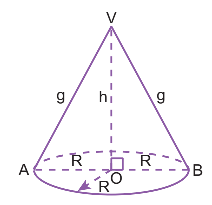
$V = 2\left(\frac{1}{3}A_{base} \cdot h\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)$

$V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{a}{2}$

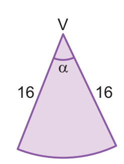
$\therefore V = \frac{\pi a^3}{4}$

Clave B

4.



El desarrollo de su superficie lateral por dato es:



$\Rightarrow g = 16$

Además: $\alpha = 45°$ (dato)

$\Rightarrow 360°\left(\frac{R}{g}\right) = 45°$

$R = \frac{45°(16)}{360°} \Rightarrow R = 2$

En el ⊿VOB por el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + R^2$

$\Rightarrow (16)^2 = h^2 + (2)^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{7}$

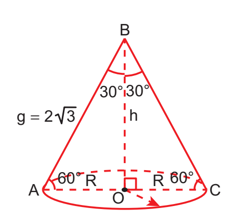
Piden: el volumen del cono (V)

$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi \,.\, 2^2)(6\sqrt{7})$

$\therefore V = 8\sqrt{7}\,\pi\ m^3$

Clave A

5.



El △ABC es la sección axial del cono.

Un cono equilátero es aquel en el cual su sección axial es un triángulo equilátero.

Entonces en el ⊿AOB notable de 30° y 60°:

$h = R\sqrt{3} \ \wedge\ g = 2R$

$\Rightarrow 2\sqrt{3} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{3}$

Piden: el volumen del cono (V)

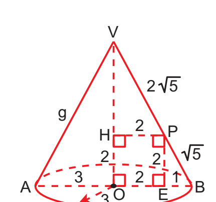
$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi R^2)(R\sqrt{3})$

$\Rightarrow V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3})^3 = 3\pi$

$\therefore V = 3\pi\ m^3$

Clave A

6.





En el ◺PEB, por el teorema de Pitágoras:

$PB = \sqrt{5}$

Por el teorema de Thales:

$\frac{BP}{PV} = \frac{BE}{EO} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{PV} = \frac{1}{2} \Rightarrow PV = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow g = 3\sqrt{5}$

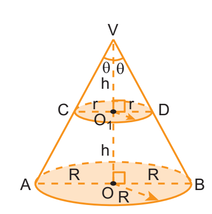
Piden el área lateral del cono:

$A_L = \pi R g = \pi(3)(3\sqrt{5})$

$\therefore A_L = 9\sqrt{5}\pi \text{ cm}^2$

Clave A

7.



Del gráfico: el ◺VO_1D ~ ◺VOB

$\Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{2h}{R} \Rightarrow R = 2r$

Por dato: el área de la base del cono mayor mide 10 m^2.

$\Rightarrow \pi R^2 = 10$

Piden el área de la base del cono menor (A):

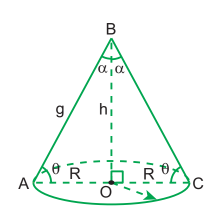
$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$

$\Rightarrow A = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{(10)}{4} = 2{,}5$

$\therefore A = 2{,}5 \text{ m}^2$

Clave B

8.



En el ◺AOB: $R = g\,\text{sen}\alpha \ \wedge \ h = g\cos\alpha$

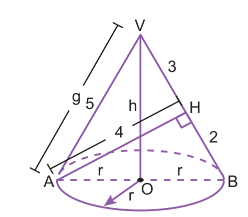
Piden el volumen del cono de revolución (V):

$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}\pi(g\,\text{sen}\alpha)^2(g\cos\alpha)$

$\therefore V = \frac{\pi g^3 \text{sen}^2\alpha \cos\alpha}{3}$

Clave A

9.



Nos piden: $A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$

$g = 5$

Por Pitágoras: $(2r)^2 = 20$

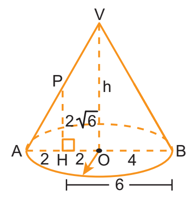
$\Rightarrow r = \sqrt{5}$

$\Rightarrow A_{total} = \pi(\sqrt{5})^2 + \pi(\sqrt{5})(5) = 5\pi + 5\sqrt{5}\pi$

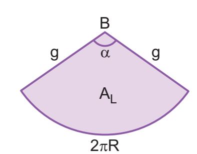
$\therefore A_{total} = 5\pi(1 + \sqrt{5})$

Clave C

10.



El desarrollo de su superficie lateral será:



Por dato: $\alpha = 120°$

$\Rightarrow 360°\left(\frac{R}{g}\right) = 120°$

$\Rightarrow \frac{R}{g} = \frac{1}{3}$ ...(1)

Además: $A_L = 3\pi \text{ cm}^2$

$\Rightarrow \pi R g = 3\pi \Rightarrow Rg = 3$ ...(2)

De (1) y (2): $R = 1 \ \wedge \ g = 3$

En el ◺AOB, por el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + R^2$

$\Rightarrow (3)^2 = h^2 + (1)^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$

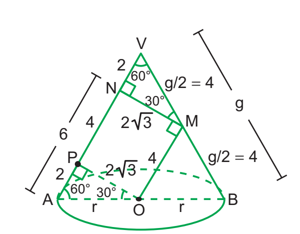
Piden: el volumen del cono (V)

$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}\pi(1)^2(2\sqrt{2})$

$\therefore V = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \text{ cm}^3$

Clave A

11.



Nos piden: $A_{SL} = \pi \cdot r \cdot g$

De la figura, $\overline{OM}$ es base media del △ABV:

$\Rightarrow AV = 8 \ \wedge \ NV = 2$

Luego: $g = 8$

En el ⊿APO notable de 30° y 60°:

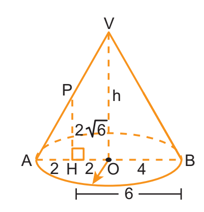
$r = 4$

$\Rightarrow A_{SL} = \pi(4)(8)$

$\therefore A_{SL} = 32\pi$

Clave B

12.



Nos piden: V_{cono}

Sea O, el centro de la base del cono, AB = 8, entonces el radio de la base del cono es 4.

$AH = 2 \Rightarrow HO = 2$

Se deduce:

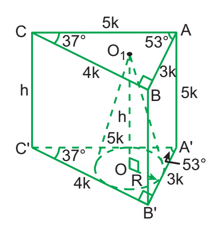
$h = VO = 2(PH) = 4\sqrt{6}$

Entonces:

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(4)^2(4\sqrt{6}) = \frac{64\sqrt{6}}{3}\pi$

Clave D

13.



Por dato: ABC-A'B'C' es un prisma recto y BB' = A'C'.

$\Rightarrow h = 5k$

Además: $V_{prisma} = 240\ cm^3$

$\Rightarrow (A_{base})h = 240$

$\Rightarrow \left(\frac{4k \cdot 3k}{2}\right)(5k) = 240$

$\Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

En el ⊿A'B'C' por el teorema de Poncelet:

$4k + 3k = 5k + 2R$

$2k = 2R$

$k = R \Rightarrow R = 2$

Piden el volumen del cono (V):

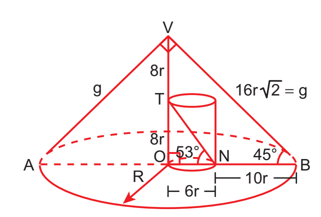
$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2)(5k)$

$\Rightarrow V = \frac{20\pi}{3}k = \frac{20\pi}{3}(2)$

$\therefore V = \frac{40\pi}{3}\ cm^3$

Clave A

14.



Nos piden: $A_{SL}(cono) = \pi \cdot R \cdot g$

Datos: VT = TO; $V_{cilindro} = 72\pi$

Sea: ON = 6r

En el ⊿TON notable de 53° y 37°:

TO = 8r

Del dato: $V_{cilindro} = 72\pi$

$\pi(3r)^2 \cdot 8r = 72\pi$

$r^3 = 1$

$r = 1$

$\Rightarrow R = 16r = 16 \ \wedge \ g = 16r\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

$\therefore A_{SL}(cono) = \pi(16)(16\sqrt{2}) = 256\sqrt{2}\,\pi$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 88) Unidad 4

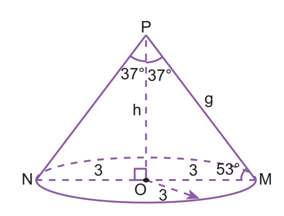
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3.



En el ⊿POM notable de 37° y 53°:

$h = 4 \ \wedge \ g = 5$

Piden: el volumen del cono (V)

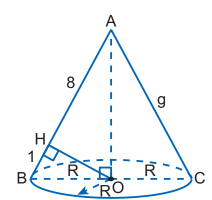
$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi \cdot 3^2)(4)$

$\Rightarrow V = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$

$\therefore V = 12\pi$

Clave E

4.



Del gráfico: g = 9

En el ⊿AOB, por relaciones métricas:

$(R)^2 = (AB)(HB)$

$\Rightarrow R^2 = (9)(1) \Rightarrow R = 3$

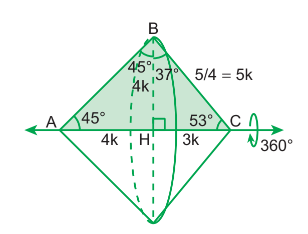
Piden: el área lateral del cono

$A_L = \pi Rg = \pi(3)(9)$

$\therefore A_L = 27\pi$

Clave C

5.





Del gráfico: los triángulos rectángulos AHB y BHC son notables.

$\Rightarrow 5k = \frac{5}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

El sólido formado está compuesto por dos conos de revolución

$$\Rightarrow \quad V_{sólido} = \frac{1}{3}\pi(4k)^2(AH) + \frac{1}{3}\pi(4k)^2(HC)$$

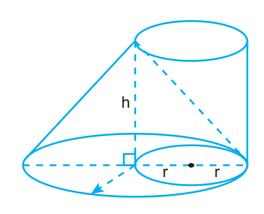
$$V_{sólido} = \frac{1}{3}\pi(16k^2)(4k) + \frac{1}{3}\pi(16k^2)(3k)$$

$$V_{sólido} = \frac{112\pi}{3}.k^3 = \frac{112\pi}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\therefore \quad V_{sólido} = \frac{7\pi}{12}\ m^3$$

Clave C

6.



Por dato:

$V_{cilindro} = 30\ cm^3$

$\Rightarrow \pi r^2 h = 30$

Piden:

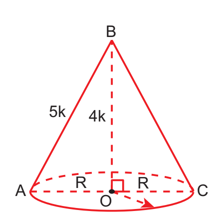
$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 . h = \frac{4}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}(30)$

$\therefore V_{cono} = 40\ cm^3$

Clave C

Resolución de problemas

7.



Por dato: $\frac{h}{g} = \frac{4}{5} \Rightarrow h = 4k \quad \wedge \quad g = 5k$

En el ⊿BOA por el teorema de Pitágoras: $R = 3k$

Además: $A_T = 216\pi\ cm^2$

$\Rightarrow A_L + A_{base} = 216\pi$

Entonces:

$\pi Rg + \pi R^2 = 216\pi$

$(3k)(5k) + (3k)^2 = 216$

$24k^2 = 216$

$k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

Piden:

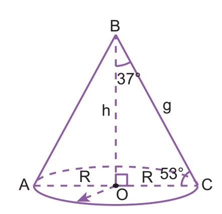
$A_{base} = \pi R^2 = \pi(3k)^2$

$\Rightarrow A_{base} = 9k^2\pi = 9(3)^2\pi$

$\therefore A_{base} = 81\pi\ cm^2$

Clave A

8.



El ⊿BOC es notable de 37° y 53°, entonces:

$\Rightarrow R = 3k,\ h = 4k$ y $g = 5k$

Por dato:

$h = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow 4k = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow k = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$

Piden: el área total del cono

$A_T = A_L + A_{base}$

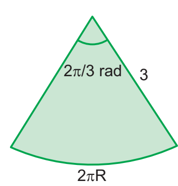
$A_T = \pi Rg + \pi R^2 = \pi(3k)(5k) + \pi(3k)^2$

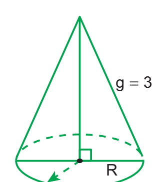
$\Rightarrow A_T = 24\pi k^2 = 24\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \pi$

$\therefore A_T = \pi\ m^2$

Clave D

9.





Se cumple:

$2\pi R = \left(\frac{2\pi}{3}\right).(3)$

$\Rightarrow R = 1$

Piden: el área total del cono

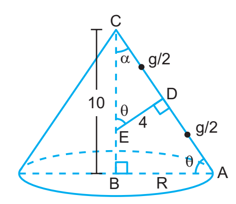
$A_T = \pi R(g + R)$

$A_T = \pi . (1)(3 + 1) = 4\pi$

$\therefore A_T = 4\pi\ m^2$

Clave A

10.



Del gráfico: ⊿ABC ~ ⊿EDC

$\Rightarrow \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{10} = \frac{4}{R} \Rightarrow \frac{g}{20} = \frac{4}{R}$

$\Rightarrow gR = 80$

Piden: el área lateral del cono

$A_L = \pi Rg = \pi(80)$

$\therefore A_L = 80\pi\ m^2$

Clave C

Nivel 2 (página 89) Unidad 4

Comunicación matemática

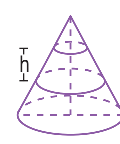
11.

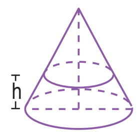
I. (V) sí pueden ser iguales ya que son semejantes.
II. (F) son semejantes no congruentes.
III. (V) sí pueden, pero serían congruentes.
IV. (F) los troncos pueden tener alturas en diferentes proporciones, por lo tanto no son semejantes.

Clave D

12.

I. (F) son iguales.
II. (V) porque son congruentes (iguales)
III. (F)



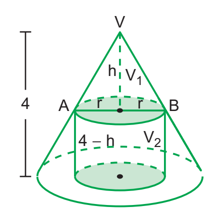


IV. (F) los troncos pueden estar en diferentes proporciones, por lo tanto no serían congruentes.

Clave B

Razonamiento y demostración

13.



Nos piden: h

Dato: $V_1 = V_2$

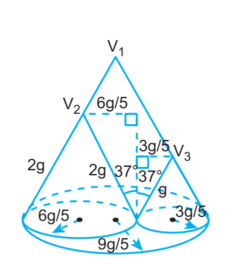
$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2(h) = \pi r^2(4 - h)$

$h = 12 - 3h$

$\therefore h = 3$

Clave C

14.



Nos piden:

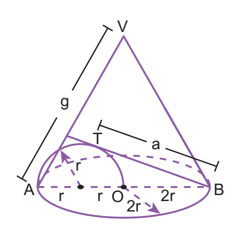
$\frac{V_1}{V_2 + V_3}$

De la figura, por ser conos semejantes tenemos:

$\frac{V_1}{V_2 + V_3} = \frac{(9/5)^3}{(6/5)^3 + (3/5)^3} = 3$

Clave B

15.



Nos piden: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2h = \frac{4}{3}\pi r^2h$ ...(1)

De la figura: $h = VO = \sqrt{g^2 - 4r^2}$

Por teorema de la tangente:

$a^2 = (4r)(2r) \Rightarrow a^2 = 8r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{8}$

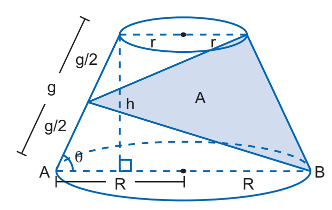
$h = \sqrt{g^2 - \frac{a^2}{2}}$

En (1):

$V_{cono} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a^2}{8}\right)\sqrt{g^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{\pi a^2}{6}\sqrt{g^2 - \frac{a^2}{2}}$

Clave D

16.



Nos piden: $A_{SL} = \pi g(R + r)$

$h = g\text{sen}\theta$

Sabemos: $A = \frac{A_T}{2}$

$2A = \left(\frac{2R + 2r}{2}\right)g\text{sen}\theta$

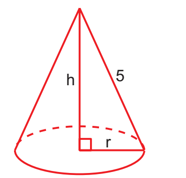
$\Rightarrow 2A\pi = \pi(R + r)g\text{sen}\theta$

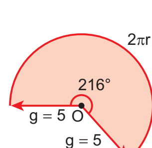
$\frac{2A\pi}{\text{sen}\theta} = A_{SL}$

Clave C

Resolución de problemas

17.





$L = 2\pi r$

$\frac{6\pi}{5} \cdot 5 = 2\pi r \Rightarrow r = 3$

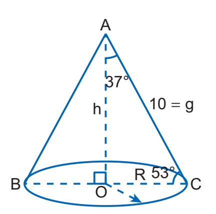
$\Rightarrow g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 52 = h^2 + 32 \Rightarrow h = 4$

Piden el volumen:

$V = \frac{1}{3}(A_{base})h = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$

Clave E

18.



Del ⊿AOC notable de 37° de 53°:

$R = 3k$, $h = 4k$ y $g = 5k$

Luego: $g = 10$

$5k = 10 \Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow R = 3(2) = 6 \ \wedge \ h = 4(2) = 8$

Piden: el volumen del cono (V)

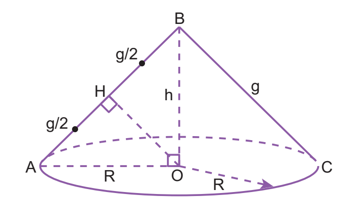
$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi \cdot 6^2)(8)$

$\Rightarrow V = \frac{288\pi}{3} = 96\pi$

$\therefore V = 96\pi$

Clave C

19.



Por dato: $\overline{HO}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

$\Rightarrow R = h \ \wedge \ g = R\sqrt{2}$

Piden:

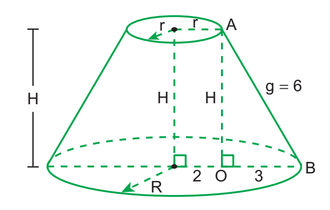
$\frac{A_{base}}{A_L} = \frac{\pi R^2}{\pi Rg} = \frac{\pi R^2}{\pi R(R\sqrt{2})}$

$\Rightarrow \frac{A_{base}}{A_L} = \frac{\pi R^2}{\pi R^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{A_{base}}{A_L} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

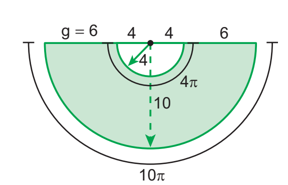
Clave E

20.



Nos piden: H

El desarrollo de la superficie lateral es un trapecio circular que tiene por radios 4 m y 10 m y ángulo central de medida 180°.



$\Rightarrow g = 6$ m

Tenemos:

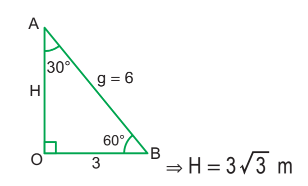
$2\pi r = 4\pi$

$r = 2$

$2\pi R = 10\pi$

$R = 5$

Luego:



$\Rightarrow H = 3\sqrt{3}$ m

Clave C

Nivel 3 (página 90) Unidad 4

Comunicación matemática

21.

I. (V) traza una altura desde el centroide hasta la generatriz.

II. (V) todo cono tiene sección axial.

III. (V) si tiene igual volumen.

IV. (F) no necesariamente porque son semejantes.

22.

I. (F) son líneas curvas.

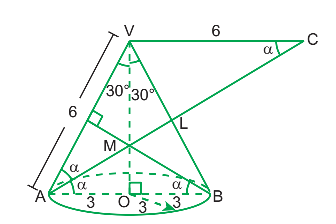
II. (F) porque es una recta.

III. (V) porque la directriz del cono siempre está inscrita en la directriz de la pirámide.

IV. (F) por definición, no coincide.

Razonamiento y demostración

23.



Nos piden: V_{cono}

Como $\overline{VC} // \overline{AB} \Rightarrow m\angle VCL = m\angle LAB = \alpha$

Además $\triangle AMB$ es isósceles:

Luego: $3\alpha = 90°$

$\alpha = 30°$

En el ⊿AOV notable de 30° y 60°:

$AO = 3 \ \wedge \ VO = 3\sqrt{3}$

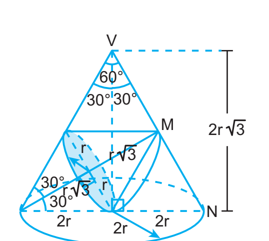
Luego:

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 3\sqrt{3}$

$\therefore V_{cono} = 9\pi\sqrt{3}$

Clave D

24.



Nos piden:

$\frac{V_{cono\ menor}}{V_{cono\ mayor}}$

Del gráfico, usando el ⊿ notable de 30° y 60°. completamos longitudes.

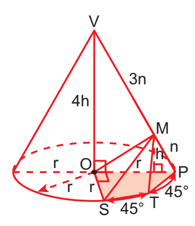
$\Rightarrow V_{cono\ menor} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times r\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \sqrt{3}$

$V_{cono\ mayor} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 \times 2r\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot r^3 \cdot \sqrt{3}$

$\therefore \frac{V_{cono\ menor}}{V_{cono\ mayor}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot r^3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{8}$

Clave C

25.

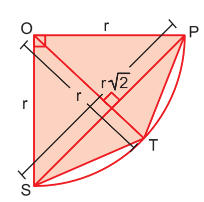


Nos piden: V_{cono}

Dato: $V_{M-OSTP} = 1\ cm^3$

$\frac{1}{3}(A_{base}) \times h = 1$ ...(α)

De la figura:



$A_{base} = A_{\square OPTS} = \frac{r(r\sqrt{2})}{2}$ ...(β)

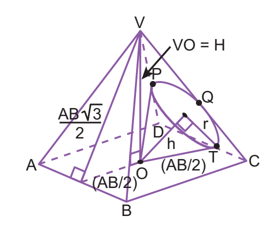
Reemplazando (β) en (α):

$\frac{1}{3}\left(\frac{r^2\sqrt{2}}{2}\right)h = 1 \Rightarrow r^2 \cdot h = 3\sqrt{2}$

Pero: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2.(4h) = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\,\pi\ cm^3$

Clave A

26. Considera: VA = AB



Nos piden: $\frac{V_{cono}}{V_{pirámide}}$

Por ser una pirámide regular:

VA = VB = VC = VD = AB = DC

De lo anterior, ΔVDC es equilátero, el radio de la circunferencia inscrita en el ΔVDC es:

$r = \frac{\sqrt{3}}{6}(AB)$

La altura del cono es:

$h^2 + r^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$; $AB = BC \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{6}(AB)$

Entonces:

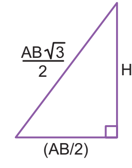
$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}AB\right)^2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}AB\right) = \frac{\pi\sqrt{6}}{216}(AB)^3$

Luego:

$V_{pirámide} = \frac{1}{3}\pi(AB)^2 \cdot H$ ...(1)

Calculamos H:

$\Rightarrow H = \frac{AB}{2}\sqrt{2}$



En (1):

$V_{pirámide} = \frac{1}{3}\pi(AB)^2\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}(AB)^3$

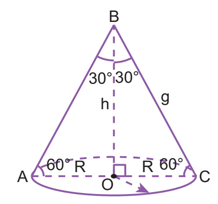
Finalmente:

$\frac{V_{cono}}{V_{pirámide}} = \frac{\sqrt{3}}{36}$

Clave E

Resolución de problemas

27.



En el ⊿BOC notable de 30° y 60°:

$h = R\sqrt{3}\ \wedge\ g = 2R$

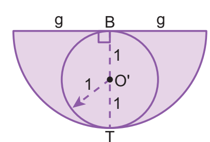
Luego, el ángulo del desarrollo de su superficie lateral será:

$\alpha = 360°\left(\frac{R}{g}\right) = 360°\left(\frac{R}{2R}\right)$

$\Rightarrow \alpha = 180°$

Entonces, el desarrollo de la superficie lateral del cono es un semicírculo.

Por dato:



$\Rightarrow g = 2$

$(2R) = 2 \Rightarrow R = 1$

Piden: el volumen del cono (V)

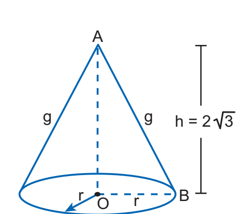
$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi R^2)(R\sqrt{3})$

$\Rightarrow V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(1)^2$

$\therefore V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ m^3$

Clave A

28.

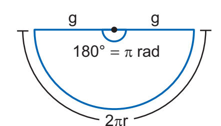


Nos piden: $A_{SL} = \frac{\pi.g^2.\theta}{360°}$

θ: ángulo de desarrollo

Dato: $\theta = 180°$

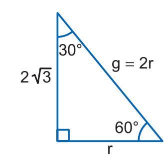
Se tiene:



$\pi g = 2\pi r$

$\Rightarrow g = 2r$

En el ⊿AOB:



$\Rightarrow r = 2$
$g = 4$

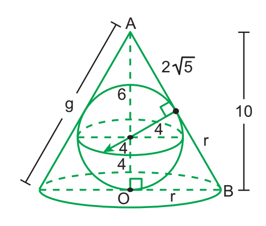
Luego:

$$A_{SL} = \frac{\pi \times (4)^2 \times 180°}{360°}$$

$\therefore A_{SL} = 8\pi$

Clave D

29.



Nos piden: $A_{SL} = \pi \cdot r \cdot g$

En el ⊿AOB por Pitágoras:

$10^2 + r^2 = (r + 2\sqrt{5})^2$

$100 + r^2 = r^2 + 4r\sqrt{5} + 20$

$4r\sqrt{5} = 80$

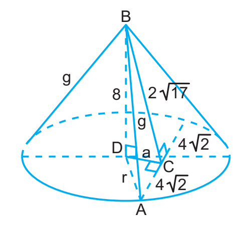
$\Rightarrow r = 4\sqrt{5}$ m

$g = 6\sqrt{5}$ m

$\Rightarrow A_{SL} = \pi(4\sqrt{5})(6\sqrt{5}) = 120\pi$ m^2

Clave C

30.



En el ◺BCA por el teorema de Pitágoras:

$g^2 = (2\sqrt{17})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 68 + 32 = 100$

$\Rightarrow g = 10$

En el ◺BDC por el teorema de Pitágoras:

$(2\sqrt{17})^2 = 8^2 + a^2 \Rightarrow 68 = 64 + a^2$

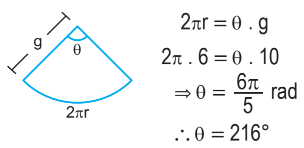
$4 = a^2 \Rightarrow a = 2$

En el ◺DCA por el teorema de Pitágoras:

$r^2 = a^2 + (4\sqrt{2})^2 = (2)^2 + 32 = 36$

$\Rightarrow r = 6$

Desarrollando la superficie lateral del cono tenemos:



$2\pi r = \theta \cdot g$

$2\pi \cdot 6 = \theta \cdot 10$

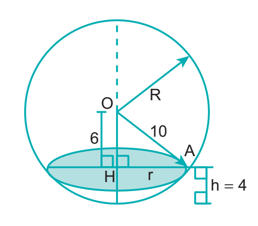
$\Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5}$ rad

$\therefore \theta = 216°$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 91) Unidad 4

1.



Por dato:
$A_{CE} = 2\pi Rh = 80\pi$
$Rh = 40$
$(10)h = 40 \Rightarrow h = 4$

En el ⊿OHA por el teorema de Pitágoras: $r = 8$

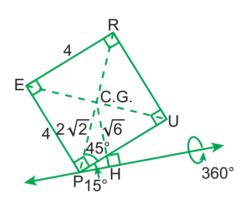
Piden:
$A_{\text{base del casquete}} = \pi r^2 = \pi(8)^2$
$\therefore A_{\text{base de casquete}} = 64\pi\ m^2$

Clave B

2. El área del piso: πr^2
El área de la superficie exterior: $2\pi r^2$
Aplicando regla de tres simple, el costo es: $200

Clave D

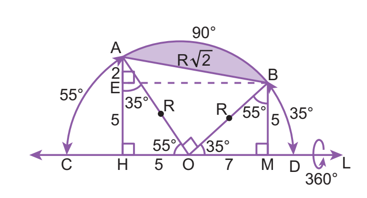
3.



Por el teorema Pappus-Guldin:
$A_{SG} = (2\pi\bar{x})L$
$\Rightarrow A_{SG} = 2\pi(\sqrt{6})16 = 32\sqrt{6}\,\pi\ u^2$

Clave A

4.



Del gráfico:
⊿AHO ≅ ⊿OMB (A-L-A)
$\Rightarrow HO = 5 \wedge OM = 7 \Rightarrow HM = 12$

En el ⊿AEB por el teorema de Pitágoras:
$(R\sqrt{2})^2 = (AE)^2 + (EB)^2 = 2^2 + 12^2$
$2R^2 = 148 \Rightarrow R^2 = 74$

Al girar la figura sombreada, se forma un anillo esférico, entonces:

$V_{AE} = \frac{1}{6}\pi(AB)^2(HM)$

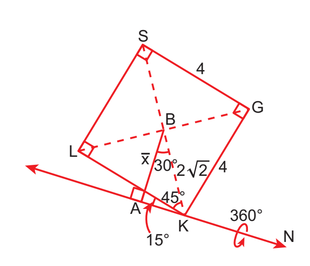
$V_{AE} = \frac{1}{6}\pi(R\sqrt{2})^2(12)$

$V_{AE} = 4R^2\pi = 4(74)\pi$

$\therefore V_{AE} = 296\pi\ u^2$

Clave E

5.



En el ⊿BAK notable de 30° y 60°:
$\bar{x} = (\sqrt{2})\sqrt{3} = \sqrt{6}$

L = perímetro de LSGK = 4(4) = 16
$\Rightarrow A_{SG} = L(2\pi\bar{x}) = 16(2\pi\sqrt{6})$
$\therefore A_{SG} = 32\pi\sqrt{6}\ m^2$

Clave A

6. Volumen generado por el semicírculo mayor:
$V_1 = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^2\right)(4) = 16\pi^2$

Volumen generado por el semicírculo menor:
$V_2 = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1^2\right)(5) = 5\pi^2$

Finalmente:
$V_1 - V_2 = 11\pi^2\ u^3$

Clave A

7. $A = \pi r^2;\ \bar{x} = 2r$
Por Pappus-Guldin:
$\therefore\ V = 2\pi A\bar{x} = 4\pi^2 r^3\ u^3$

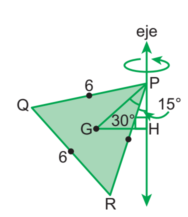
Clave D

8. $\frac{4}{3}\pi R^3 = n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$n = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{3}{1}\right)^3 = 27$

Clave C

9.



Dato: PQ = QR = PR
De la figura, PHG es el triángulo rectángulo notable de 45° y 45°, además, en este caso G es el baricentro del triángulo PQR:

$GP = 2\sqrt{3} \Rightarrow \bar{x} = GH = \sqrt{6}\,;\ A = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

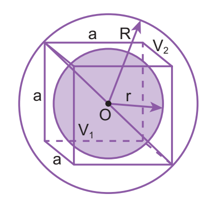
Entonces:
$V = 2\pi\bar{x}A = 2\pi(\sqrt{6})(9\sqrt{3}) = 54\sqrt{2}\,\pi\ u^3$

Clave B

10. De la figura:

$r = \frac{a}{2}$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Luego:

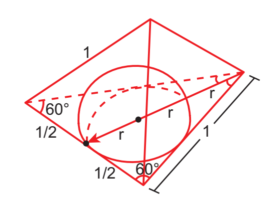
$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Clave C

11.



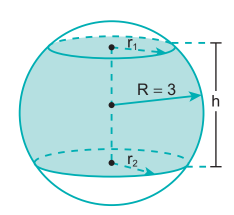
De la figura:

$3r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ m

Clave B

12.



El área total del segmento esférico es:

$A_T = 2\pi Rh + \pi(r_1)^2 + \pi(r_2)^2$

Por dato:

$A_T = 11\pi$; $r_2 = r_1 + 1$; $h = 1$

$\Rightarrow 11\pi = 2\pi(3) + \pi(r_1)^2 + \pi(r_1 + 1)^2$

$11 = 6 + (r_1)^2 + (r_1)^2 + 1 + 2r_1$

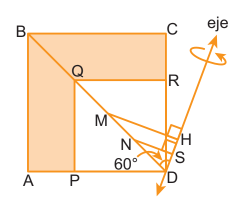
$2 = (r_1)^2 + r_1$

$\Rightarrow r_1 = 1$ cm

$\therefore r_2 = 2$ cm (radio d la base mayor)

Clave C

13.



Volumen generado por el cuadrado mayor:

$AB = 6$; $MD = 3\sqrt{2} \Rightarrow MH = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$V_1 = 2\pi(36)\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) = 108\pi\sqrt{6}\ u^3$

Volumen generado por el cuadrado menor:

$PQ = 4$; $ND = 2\sqrt{2} \Rightarrow NS = \sqrt{6}$

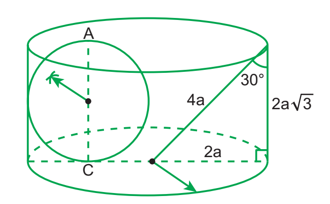
$V_2 = 2\pi(16)(\sqrt{6}) = 32\pi\sqrt{6}\ u^3$

Entonces:

$V_1 - V_2 = 76\pi\sqrt{6}\ u^3$

Clave D

14.



Para la esfera:

$A_{SE} = 4\pi(a\sqrt{3})^2 = 12\pi a^2$

Para el cilindro:

$A_{LC} = 2\pi(2a)(2a\sqrt{3}) = 8\pi a^2\sqrt{3}$

Por lo tanto:

$\frac{A_{SE}}{A_{LC}} = \frac{12\pi a^2}{8\pi a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 93) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

I. Segmento esférico
II. Cuña esférica
III. Anillo esférico
IV. Casquete esférico
V. Sector esférico

2. I. (F) porque, genera una superficie de revolución.
II. (F) porque, genera un anillo esférico.
III. (V) por definición.
IV. (F) porque, tienen que ser coplanares.

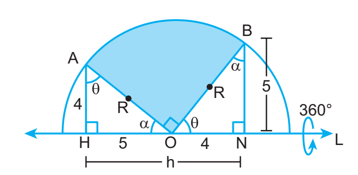
Clave D

3. I. (F) porque, solo es sólido de revolución para un cilindro recto de base circular.
II. (F) porque, solo es sólido de revolución para un cono recto de base circular.
III. (F) porque, genera un sector esférico.
IV. (F) porque genera un plano.

Clave D

Razonamiento y demostración

4.



Del gráfico:

$\triangle AHO \cong \triangle ONB$ (A-L-A)

$\Rightarrow AH = 4 \wedge HO = 5$

Además, por el teorema de Pitágoras:

$R^2 = 4^2 + 5^2 = 41 \Rightarrow R = \sqrt{41}$

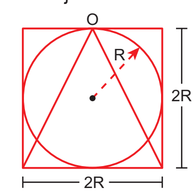
Piden:

$V_{SE} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{41})^2 . 9$

$\therefore V_{SE} = 246\pi\ m^3$

Clave E

5. Graficamos la sección axial del conjunto mostrado:



Volumen de la esfera:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Volumen del cono:

$V_{cono} = \frac{2}{3}\pi R^3$

Volumen del cilindro:

$V_{cilindro} = 2\pi R^3$

Luego:

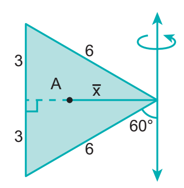
$\frac{V_{esfera}}{2} = \frac{V_{cono}}{1} = \frac{V_{cilindro}}{3}$

Entonces:

$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$

Clave E

6.



$A = \frac{1}{4}(6)^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\bar{x} = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Por lo tanto:

$V_{SG} = 2\pi(9\sqrt{3})(2\sqrt{3}) = 108\pi \text{ cm}^3$

Clave D

Resolución de problemas

7. El diámetro de la esfera circunscrita al hexaedro mide igual que la diagonal del hexaedro, entonces:

$A_{SE} = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$

$A_{cubo} = 6a^2$

$\therefore \frac{A_{cubo}}{A_{SE}} = \frac{2}{\pi}$

Clave D

8. Por ser sólidos equivalentes se cumple:

$\frac{4}{3}\pi(6)^3 = \pi(4)^2h$

$72 = 4h \Rightarrow h = 18$

Área lateral del cilindro:

$\therefore A_L = 2\pi rh = 2\pi(4)(18) = 144\pi \text{ cm}^2$

Clave A

9. Para el cono:

$h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h = 8$

Por ser sólidos equivalentes:

$\frac{1}{3}\pi(6)^2(8) = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 2\sqrt[3]{9}$

Área de la superficie esférica:

$A_{SE} = 4\pi R^2$

$\therefore \Rightarrow A_{SE} = 4\pi(2\sqrt[3]{9})^2 = 48\pi\sqrt[3]{3} \text{ u}^2$

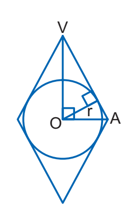
Clave E

10. Volumen y área del octaedro de arista **a**:

$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3; A = 2\sqrt{3}a^2$

Luego: $\frac{V}{A} = \frac{\sqrt{6}}{18}a$

Graficamos la sección axial del conjunto mostrado:



El radio de la esfera inscrita es:

$VO = \frac{\sqrt{2}}{2}a; OA = \frac{1}{2}a \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{6}a$

$VA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Entonces: $\frac{V}{A} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{3V}{A}$

Clave C

11. Planteamos una regla de tres simple:

$360° \text{ ———— } \frac{4}{3}\pi r^3$

$60° \text{ ———— } V$

$V = \frac{2}{9}\pi r^3$

$AB = 2r = 6 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow V = 6\pi \text{ m}^3$

Clave A

Nivel 2 (página 93) Unidad 4

Comunicación matemática

12.

I. (V) porque es coplanar y no secante.
II. (F) porque genera un plano.
III. (F) porque es una superficie secante.
IV. (V) una figura sí puede formar un sólido de revolución.

13.

I. (V) porque forman 2 superficies de cono de revolución con un mismo vértice.
II. (F) porque tienen que ser coplanares.
III. (F) porque no puede ser secante.
IV. (F) porque solo generan sólidos de revolución las regiones planas.

Clave A

14.

I. (F) genera una superficie de revolución.

II. (V) por definición.

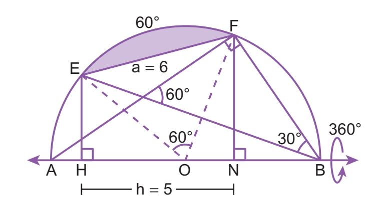
III. (F) porque es secante.

IV. (V) por definición de sólido no convexo (por un sólido pasa una recta que interseca a un sólido en más de 2 puntos).

Clave A

Razonamiento y demostración

15.



Piden:

$V_{AE} = \frac{1}{6}\pi a^2 h = \frac{1}{6}\pi(6^2)(5)$

$\therefore V_{AE} = 30\pi\ m^3$

Clave A

16. Aplicamos el teorema de Herón:

$A_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$

Además: $A_{\triangle ABC} = p(r)$

$\Rightarrow 6\sqrt{6} = 9 . r$

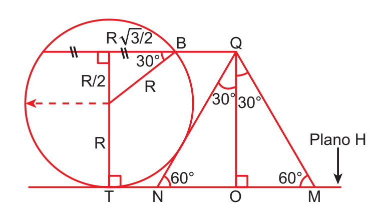
$\Rightarrow r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Por lo tanto:

$\therefore\ V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^3 = \frac{64}{27}\sqrt{6}\,\pi$

Clave D

17.



$\frac{4}{3}\pi R^3 = 32\sqrt{3}\,\pi \Rightarrow R^3 = 24\sqrt{3}$

De la figura:

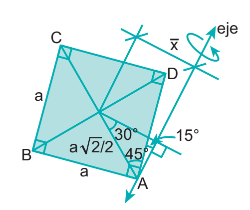
$OQ = \frac{3R}{2}$; $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}R\right) = \frac{3}{8}\pi R^3$

$V_{cono} = 9\sqrt{3}\,\pi$

Clave C

18.



De la figura: $A_{\square ABCD} = a^2$

$\bar{x} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$

Luego, por Pappus-Guldin:

$2\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)a^2 = 4\pi\sqrt{6}$

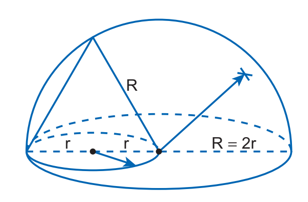
$a = 2$

Por lo tanto:

$2p_{ABCD} = 4a = 4(2) = 8$ cm

Clave D

19.



Por dato, el área lateral del cono es 18π cm^2, entonces:

$\pi r R = 18\pi$

Del gráfico: $R = 2r$

$\Rightarrow \pi r(2r) = 18\pi$

$r^2 = 9$

Área total de la semiesfera:

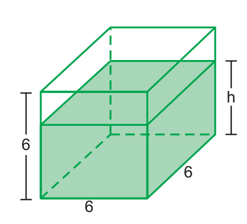
$A_{SE} = 2\pi(2r)^2 + \pi(2r)^2 = 12\pi r^2$

$\therefore A_{SE} = 12\pi(9) = 108\pi\ cm^2$

Clave D

Resolución de problemas

20.



$V_{cubo} = 6^3 = 216\ cm^3$

$V_{pelota} = V_{agua\ desalojada} = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi\ cm^3$

Del gráfico se observa:

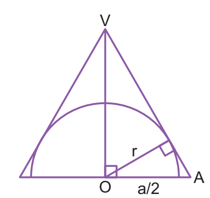
$V_{resultante} = V_{cubo} - V_{agua\ desalojada}$

$36h = 216 - 36\pi$

$h = (6 - \pi)$ cm

Clave D

21. $V_{octaedro} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a = 3$



$VO = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $VA = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$OA = \frac{a}{2}$

En el ◺ VOA por relaciones métricas:

$\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)r \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$r = \frac{3(\sqrt{6})}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Entonces:

$A_{SE} = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6\pi\ m^2$

Clave D

22. Por regla de tres simple:

$360° ________ 2\pi r^2$

$18° ________ A$

$A = \frac{\pi r^2}{10}$; $r = 3$

$\therefore A = \frac{9\pi}{10}\ m^2$

Clave C

Nivel 3 (página 94) Unidad 4

Comunicación matemática

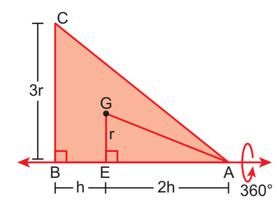
23. I, II, IV, V, VI, X, XI

24. III, VII, VIII, IX, XII

25. I, VII, VIII

Razonamiento y demostración

26.



V_1: volumen generado por la región GEA.
V_2: volumen generado por la región CBA.

Entonces:

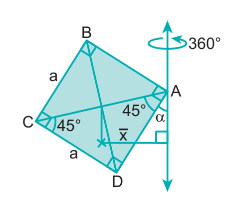
$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2(2h) = \frac{2}{3}\pi r^2 h$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi(3r)^2(3h) = 9\pi r^2 h$

Por lo tanto: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{27}$

Clave A

27.



$V = 2\pi a^2\bar{x}$

$\bar{x} = \frac{a}{\sqrt{2}}\ \text{sen}(45° + \alpha)$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{a}{2}(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$

Luego, el volumen generado es:

$V = \pi a^3(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$

Para hallar el máximo valor usamos la derivada:

$V' = \pi a^3(-\text{sen}\alpha + \cos\alpha) = 0$

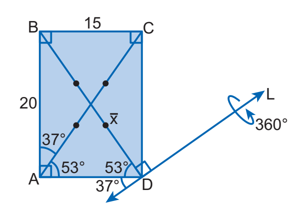
$\Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\alpha$

$\tan\alpha = 1$

$\alpha = 45°$

Clave C

28.



$A_{\square ABCD} = 15(20) = 300\ m^2$

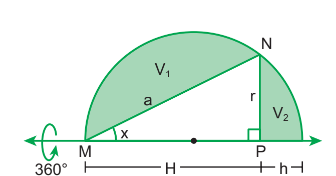
$\bar{x} = \frac{25}{2}$

Luego, el volumen generado es:

$V = 2\pi(300)\left(\frac{25}{2}\right) = 7500\pi\ m^3$

Clave B

29.



Por relaciones métricas sabemos:

$r^2 = H(h)$ ...(1)

$a^2 = H(H + h)$ ...(2)

Por dato:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{80}{13} \Rightarrow \frac{\frac{\pi a^2 H}{6}}{\frac{\pi}{6}h^3 + \frac{\pi r^2 h}{2}} = \frac{80}{13}$

$\frac{a^2 H}{h^3 + 3r^2 h} = \frac{80}{13}$

$\Rightarrow 13[H(H+h)]H = 80h^3 + 240(Hh)h$

$13H^3 + 13H^2h = 80h^3 + 240h^2H$

Ordenando respecto a H^3:

$13H^3 + (13h)H^2 - (240h^2)H - 80h^3 = 0$

Por divisores binómicos:

	13	13h	$-240h^2$	$-80h^3$
H = 4h		52h	$260h^2$	$80h^3$
	13	65h	$20h^2$	0

$\Rightarrow (H-4h)(13H^2 + 65hH + 20h^2) = 0$

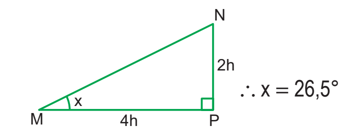
$\Rightarrow H = 4h$

En (1):

$r^2 = 4h(h)$

$\Rightarrow r = 2h$

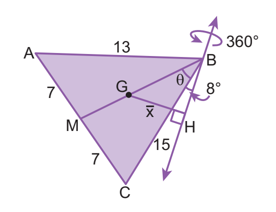
En el ⊿ MPN:



$\therefore\ 26,5° = 26°30'$

Clave B

30.



Teorema de Herón:

$A_{\Delta ABC} = \sqrt{21(8)(6)(7)} = 84\ u^2$

Teorema de la mediana:

$13^2 + 15^2 = 2(BM)^2 + \dfrac{14^2}{2}$

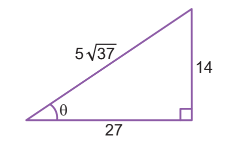
$BM = 2\sqrt{37}$

$\Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}(2\sqrt{37}) = \dfrac{4}{3}\sqrt{37}$

$A_{\Delta MBC} = 42 = \dfrac{(BM)(15)}{2} \times \text{sen}\theta$

$\Rightarrow 42 = \dfrac{(2\sqrt{37})(15)}{2} \times \text{sen}\theta$

$\text{sen}\theta = \dfrac{14}{5\sqrt{37}}$



En el ⊿ GHB:

$GH = \bar{x} = BG\text{sen}(\theta + 8°)$

$\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{4}{3}\sqrt{37}\left[\dfrac{14}{5\sqrt{37}} \cdot \dfrac{7}{5\sqrt{2}} + \dfrac{27}{5\sqrt{37}} \cdot \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right]$

$\bar{x} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

Por lo tanto, el volumen generado es:

$V_{SG} = (2\pi\bar{x})A_{\Delta ABC}$

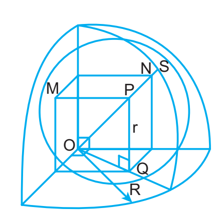
$= 2\pi\left(\dfrac{10\sqrt{2}}{3}\right)84$

$V_{SG} = 560\pi\sqrt{2}\ u^3$

Clave E

Resolución de problemas

31.



M, N y S son puntos de tangencia de ambas superficies, P es el centro de la esfera inscrita.

De la figura:

$OP = r\sqrt{3}$; $R = OP + r = r(\sqrt{3} + 1)$

Luego:

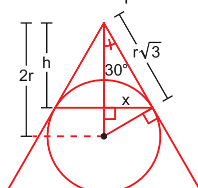
$r = \dfrac{R(\sqrt{3} - 1)}{2}$

Dato:

$R = 4 \Rightarrow r = 2(\sqrt{3} - 1)$

Clave A

32. Los valores del radio y la altura del cono parcial son:



$x = \dfrac{r}{2}\sqrt{3}$; $h = \dfrac{3}{2}r$

Por lo tanto:

$V_{\text{cono parcial}} = \dfrac{1}{3}\pi x^2 h = \dfrac{3}{8}\pi r^3$

Clave C

33. Por datos:

$V_{CE} = V_{SE} \wedge R = 3$ cm

$\Rightarrow \dfrac{\pi R^3 \alpha}{270°} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$

$\alpha = 60h$

Además: h = 3 cm

$\Rightarrow \alpha = 180°$

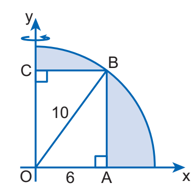
Por lo tanto:

$V_{CE} = \dfrac{\pi R^3 \alpha}{270°} = \dfrac{\pi(3^3)(180°)}{270°} = 18\pi\ cm^3$

Clave E

MARATÓN MATEMÁTICA (pagina 96) Unidad 4

1. Por Pitágoras: BA = 8



El volumen de revolución está dado por la diferencia de una semiesfera y un cilindro:

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{4}{3}(10)^3 = \frac{2000}{3}\pi$$

$$V_{cilindro} = \pi \times 6^2 \times 8 = 288\pi$$

$$V_{revolución} = V_{semiesfera} - V_{cilindro}$$

$$= \frac{2000}{3}\pi - 288\pi$$

$$= \frac{1136}{3}\pi$$

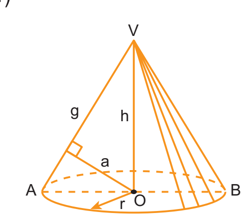
Clave A

2. Paso 1:

Del área lateral:

$A_L = \pi rg = b$

$\Rightarrow \pi r = \frac{b}{g}$ ... (1)



Paso 2:

En el $\triangle$AOV; por relaciones métricas:

$a \times g = r \times h$ ... (2)

$\therefore V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}(\pi r)(r h)$ ... (α)

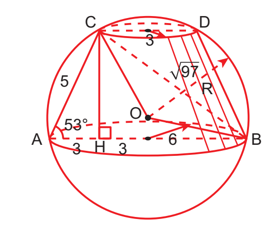
De (1) y (2) en (α):

$V_{cono} = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{g}\right)(a \times g) = \frac{a \times b}{3}$

Clave E

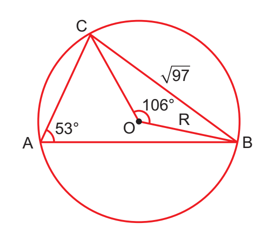
3. Paso 1:

- En el ⊿AHC, por Pitágoras:
  CH = 4
- En el ⊿CHB; por Pitágoras:
  $CB^2 = CH^2 + HB^2$
  $CB = \sqrt{97}$



Paso 2:

- Por propiedad de circunferencia:
  $\overset{\frown}{CB} = 106°$
  $\Rightarrow \angle COB = 106°$
- $\cos 106° = \frac{-7}{25}$



Hallamos **R**:

Por ley de cosenos:

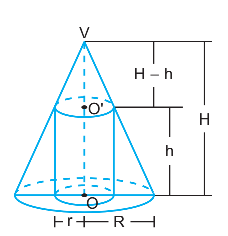
$CB^2 = CO^2 + OB^2 - 2(CO)(OB)\cos 106°$

$97 = 2R^2(1 - \cos 106°)$

$R^2 = \frac{25 \times 97}{64} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{97}}{8}$ u

Clave E

4.



Paso 1:

Por semejanza de conos:

Vo' ~ Vo

$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H - h)$ ... (α)

Paso 2:

Del área lateral del cilindro:

$A_L = 2\pi rh \Rightarrow$ reemplazando (α):

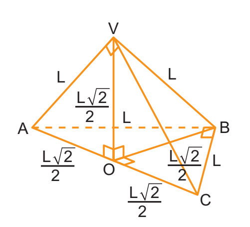
$A_L = \frac{2\pi R}{H}(H-h)h = \frac{2\pi R}{H}\left[\frac{H^2}{4} - \left(h - \frac{H}{2}\right)^2\right]$

El área del cilindro será máximo cuando:

$h - \frac{H}{2} = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{2}$

Clave B

5.



Como $VO = BO = \frac{L\sqrt{2}}{2}$ y VB = L, entonces el triángulo VOB es notable de 45°, es decir: m$\angle$VOB = 90°.

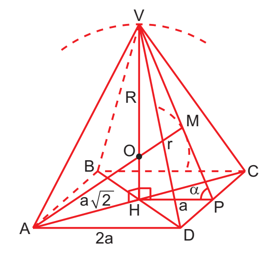
Se tiene $\overline{VO} \perp \overline{AC}$ y $\overline{VO} \perp \overline{BO}$, entonces $\overline{VO}$ es perpendicular al plano que contiene a la región triangular ABC, siendo esta la altura de la pirámide V-ABC.

$\Rightarrow$ Volumen$_{(V\text{-}ABC)} = \frac{1}{3}\left(\frac{L \times L}{2}\right)\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore$ Volumen$_{(V\text{-}ABC)} = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$

Clave E

6.



Paso 1:

En la pirámide (V-ABCD):

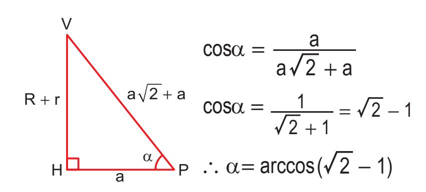
- Si AD = 2a
- Por semejanza: $\Delta AHO \sim \Delta OMV$

  $AH = MV = a\sqrt{2}$
- Por propiedad de circunferencia:

  $HP = PM = a$

Paso 2:

En el ΔVHP:



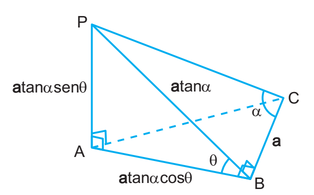
$\cos\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2} + a}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$

$\therefore \alpha = \arccos(\sqrt{2} - 1)$

Clave B

7.



Por el teorema de las tres perpendiculares:

$(\overline{PA} \perp \overline{AB} \wedge \overline{PA} \perp \overline{AC}) \wedge \overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{PB} = \overline{BC}$

En el ΔPBC: $PB = a\tan\alpha$

En el ΔPAB: $PA = a\tan\alpha\,\text{sen}\theta$ y

$AB = a\tan\alpha\cos\theta$

$\therefore V_{P\text{-}ABC} = \frac{1}{3}A_{ABC} \times AP$

$V_{P\text{-}ABC} = \frac{1}{6}a^3\tan^2\alpha \,.\, \text{sen}\theta \,.\, \cos\theta$

$V_{P\text{-}ABC} = \frac{1}{12}a^3\tan^2\alpha \,.\, \text{sen}2\theta$

Clave A

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344